



# LA PENSÉE FONCTIONNELLE DES ÉLÈVES DE 10 À 16 ANS – ANALYSES COMPARATIVES ET ÉTUDES EMPIRIQUES DE SON ENSEIGNEMENT EN FRANCE ET EN ALLEMAGNE

Pascal Stölting,

## ► To cite this version:

Pascal Stölting,. LA PENSÉE FONCTIONNELLE DES ÉLÈVES DE 10 À 16 ANS – ANALYSES COMPARATIVES ET ÉTUDES EMPIRIQUES DE SON ENSEIGNEMENT EN FRANCE ET EN ALLEMAGNE . Histoire et perspectives sur les mathématiques [math.HO]. Université Denis Diderot Paris 7; Universität Regensburg, 2008. Français. NNT : . tel-01260051

**HAL Id: tel-01260051**

**<https://theses.hal.science/tel-01260051>**

Submitted on 21 Jan 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÄT  
REGENSBURG

université  
**PARIS  
DIDEROT**  
PARIS 7

UNIVERSITÉ  
PARIS. DIDEROT  
(Paris 7)

**ECOLE DOCTORALE : Savoirs scientifiques**

**DOCTORAT**

Didactique des mathématiques

**Pascal STÖLTING**

*RÉSUMÉ EN FRANÇAIS DE LA THÈSE AVEC LE TITRE :*

LA PENSÉE FONCTIONNELLE DES ÉLÈVES DE 10 À 16 ANS –  
ANALYSES COMPARATIVES ET ÉTUDES EMPIRIQUES DE SON  
ENSEIGNEMENT EN FRANCE ET EN ALLEMAGNE

DIE ENTWICKLUNG FUNKTIONALEN DENKENS IN DER  
SEKUNDARSTUFE I –  
VERGLEICHENDE ANALYSEN UND EMPIRISCHE STUDIEN ZUM  
MATHEMATIKUNTERRICHT IN DEUTSCHLAND UND FRANKREICH

**Thèse dirigée par : Rudolf VOM HOFÉ / Alain KUZNIAK**

Soutenue le 18.1.2008

**JURY**

Michelle Artigue, Président

Rudolf vom Hofe

Alain Kuzniak

François Pluvinage

Werner Blum

Rudolf Sträßer





UNIVERSITÄT  
REGENSBURG



UNIVERSITÉ  
PARIS. DIDEROT  
(Paris 7)

**ECOLE DOCTORALE : Savoirs scientifiques**

**DOCTORAT**

**Didactique des mathématiques**

**Pascal STÖLTING**

*RÉSUMÉ EN FRANÇAIS DE LA THÈSE AVEC LE TITRE :*

**LA PENSÉE FONCTIONNELLE DES ÉLÈVES DE 10 À 16 ANS –  
ANALYSES COMPARATIVES ET ÉTUDES EMPIRIQUES DE SON  
ENSEIGNEMENT EN FRANCE ET EN ALLEMAGNE**

**DIE ENTWICKLUNG FUNKTIONALEN DENKENS IN DER  
SEKUNDARSTUFE I –  
VERGLEICHENDE ANALYSEN UND EMPIRISCHE STUDIEN ZUM  
MATHEMATIKUNTERRICHT IN DEUTSCHLAND UND FRANKREICH**

**Thèse dirigée par : Rudolf VOM HOFÉ / Alain KUZNIAK**

**Soutenue le 18.1.2008**

**JURY**

**Michelle Artigue, Président**

**Rudolf vom Hofe**

**Alain Kuzniak**

**François Pluvinage**

**Werner Blum**

**Rudolf Sträßer**





## Résumé par chapitres en français

La thèse, qui est à l'origine de cette publication, a été faite dans le cadre d'une cotutelle entre l'université Paris 7 – Denis Diderot en France et l'Universität Regensburg en Allemagne. Cette publication propose des résumés par chapitres en français pour faciliter l'accès aux contenus aux lecteurs français.

Bei der Arbeit, die als Grundlage für die vorliegende Publikation dient, handelt es sich um eine Dissertation, die im Cotutelle Verfahren an der Universität Regensburg in Deutschland und der Universität Paris 7 – Denis Diderot in Frankreich durchgeführt wurde. Da die Arbeit auf Deutsch verfasst ist wird auf den folgenden Seiten eine französische Zusammenfassung der einzelnen Kapitel angeboten.

J'aimerais remercier toutes les personnes et organisations, qui m'ont permis par leurs divers soutiens à plusieurs niveaux de rédiger la thèse, qui est à la base de cette publication.

La thèse a été faite dans le cadre d'une cotutelle de thèse entre l'université Paris 7 – Denis Diderot et l'université de Regensburg. L'organisation et la réalisation d'une telle thèse exige un grand engagement de toute les personnes et institutions concernées.

En tout premier lieu j'aimerais remercier mes deux directeurs de thèse, Rudolf vom Hofe et Alain Kuzniak pour leurs conseils et leurs appui, qui ne s'est pas seulement limité au domaine de la recherche. J'ai eu la chance d'apprendre beaucoup de choses grâce à eux dans les dernières années, ce qui a fortement marqué ma recherche.

J'aimerais aussi exprimer ma gratitude aux universités Paris 7 – Denis Diderot et Regensburg, qui m'ont toujours soutenu lors la réalisation de cette thèse internationale.

Il ne m'aurait pas été possible de faire ce travail sans le soutien de ma famille, de mes amis ainsi que de mes collègues. J'aimerais en particulier remercier Sonia Martinez Sanz et Sebastian Wartha, qui m'ont accompagné et soutenu aussi bien scientifiquement que personnellement pendant les trois dernières années.

Je dois le soutien financier aux universités de Regensburg et de Bielefeld, auprès desquelles j'ai travaillé en tant qu'employé scientifique. D'autre part j'ai reçu un soutien financier de la part de la Deutsche Forschungsgemeinschaft, du Deutscher akademischer Austauschdienst et de l'Université Franco-Allemande. Les deux derniers m'ont permis de faire mes recherches à l'université Paris 7 – Denis Diderot.

Finalement j'aimerais remercier les professeurs et élèves, qui sont, par leur participation aux interviews ou aux évaluations écrites, à la base des résultats de ce travail.



# Table des matières

<b>TABLE DES MATIERES .....</b>	<b>5</b>
<b>INTRODUCTION.....</b>	<b>7</b>
<b>1 LA PENSÉE FONCTIONNELLE .....</b>	<b>11</b>
1.1 HISTORIQUE DE LA NOTION DE PENSEE FONCTIONNELLE .....	11
1.2 DEFINITION DE LA NOTION DE PENSEE FONCTIONNELLE .....	12
<b>2 APERÇU HISTORIQUE.....</b>	<b>15</b>
2.1 TABLEAUX, GRAPHIQUES ET FORMULES .....	15
2.2 L'AFFINEMENT DE LA DEFINITION DE FONCTION.....	17
<b>3 CADRE THÉORIQUE .....</b>	<b>21</b>
3.1 BASE THEORIQUE.....	21
3.1.1 <i>Approche sémiotique : les registres sémiotiques de Duval</i> .....	21
3.1.2 <i>Approche psychologique : les champs conceptuels de Vergnaud</i> .....	22
3.1.3 <i>Approche constructiviste : Grundvorstellungen de vom Hofe et Grundkenntnisse</i> .....	23
3.1.3.1 Grundvorstellungen.....	23
3.1.3.2 Grundkenntnisse.....	27
3.1.4 <i>Autres théories utilisées</i> .....	29
3.2 LES REPRESENTATIONS ET LES PASSAGES ENTRE ELLES .....	30
3.3 LA DEFINITION DE LA NOTION DE FONCTION .....	33
<b>4 RECHERCHES SUR L'APPRENTISSAGE DES FONCTIONS.....</b>	<b>35</b>
<b>5 QUESTIONS DE RECHERCHE ET METHODOLOGIE .....</b>	<b>39</b>
5.1 QUESTIONS DE RECHERCHE .....	39
5.2 METHODOLOGIE .....	40
<b>6 ANALYSE ET COMPARAISON DU CURRICULUM SOUHAITE.....</b>	<b>43</b>
6.1 COMPARAISON DES DEUX PAYS .....	43
6.2 LES PROGRAMMES BAVAROIS .....	44
6.3 LES PROGRAMMES FRANÇAIS.....	45
6.4 COMPARAISON DES PROGRAMMES.....	46
<b>7 ANALYSE ET COMPARAISON DU CURRICULUM POTENTIEL .....</b>	<b>51</b>
7.1 LES LIVRES DE CLASSE BAVAROIS.....	51
7.2 LES LIVRES DE CLASSE FRANÇAIS .....	53
7.3 COMPARAISON DES LIVRES DE CLASSE .....	55
<b>8 ANALYSES QUANTITATIVES .....</b>	<b>59</b>
8.1 PISA 2003 .....	59
8.2 PALMA .....	62
<b>9 ANALYSES QUALITATIVES .....</b>	<b>69</b>
9.1 LES PROBLEMES.....	69

9.2	INTERVIEWS CHOISIES.....	73
9.2.1	<i>Vision iconique</i> .....	73
9.2.2	<i>Fixation linéaire</i> .....	77
9.2.3	<i>Grundvorstellung de covariation</i> .....	80
9.2.4	<i>Causalité</i> .....	83
9.3	RESULTATS DE CE CHAPITRE.....	84
<b>10</b>	<b>PROPOSITIONS DE CHANGEMENTS ET PERSPECTIVES.....</b>	<b>85</b>
10.1	PROPOSITIONS DE CHANGEMENTS.....	85
10.2	PERSPECTIVES .....	86
	<b>BIBLIOGRAPHIE.....</b>	<b>88</b>
	ARTICLES .....	88
	PROGRAMMES: .....	99
	LIVRES DE CLASSE .....	103

## Introduction

Actuellement un client allemand doit prendre la décision suivante lors de la signature d'un nouveau contrat de téléphonie mobile. Doit-il se décider pour un nouveau tarif forfaitaire que les compagnies de téléphone proposent dans leurs publicités malgré un prix fixe assez élevé ? Ou vaut-il mieux garder un contrat classique avec un prix fixe modéré et des tarifs dépendant du temps des communications effectuées ? Il existe aussi toujours la possibilité de prendre une carte sans abonnement, mais avec des prix à la minute très élevés.

Pour pouvoir répondre de manière fondée, il est nécessaire de comprendre qu'il s'agit d'un problème dans lequel deux grandeurs dépendent l'une de l'autre. Le critère important pour prendre une décision est le prix qui dépend de la durée des communications. Un prix est associé à chaque durée et il varie de manière différente avec la durée selon l'offre choisie.

Dans ce premier exemple il s'agit d'accroissement linéaire. Lors de placement d'argent ou de prise de crédit, il est nécessaire d'avoir développé une compréhension des accroissements non-linéaires pour pouvoir comprendre la situation et la juger correctement.

Ces deux exemples montrent la diversité des situations fonctionnelles qu'on rencontre dans la vie quotidienne et les décisions qui doivent être prises. La capacité de gérer des situations fonctionnelles et de prendre des décisions fondées est une condition nécessaire pour être un citoyen constructif, impliqué et réfléchi.

Mais les résultats d'études comme PISA ou PALMA montrent que beaucoup d'élèves allemands ont des difficultés avec les problèmes concernant des situations fonctionnelles et que leurs scores restent en dessous des scores des élèves venant d'autres pays.

Cette divergence entre l'importance primordiale du contenu et les faibles résultats des élèves allemands constitue le point de départ de ce travail. Des questions se posent sur les capacités et les idées réellement requises ainsi que sur leur mise en pratique et sur leur soutien dans les curricula.

Les analyses des difficultés typiques mènent à la question de savoir quels changements dans l'enseignement peuvent aider à faire diminuer ou disparaître ces problèmes. Ce travail traite des approches en France et en Allemagne. Ces deux grands pays européens travaillent avec des concepts différents et l'échange entre les communautés de chercheurs ne s'est pas encore largement développé. On peut donc s'attendre à des impulsions positives pour les deux pays en comparant les deux approches. Dans le cadre de ce travail seront comparées les théories et manières d'agir concernant le travail sur les situations fonctionnelles pour en extraire les points forts et les points faibles et finalement proposer des changements.

L'objet de recherche est décrit en détail dans le premier chapitre. La *pensée fonctionnelle* y est définie et elle y est associée à des idées et des capacités nécessaires pour savoir traiter les situations fonctionnelles.

Les deux chapitres suivants se centrent sur un travail de théorie précédant les analyses comparatives. Le cadre théorique de la pensée fonctionnelle y est défini et les outils d'analyse utilisés dans la suite y sont développés.

Le second chapitre retrace le développement historique de la notion de fonction. Le but est de montrer à quelles difficultés ce développement s'est trouvé confronté et comment celles-ci ont été surmontées. Un poids important est donné dans la définition de pensée fonctionnelle aux facteurs décisifs qui ont permis les avancées substantielles.

Les concepts théoriques utilisés en France, en Allemagne et dans la recherche internationale sont traités dans le troisième chapitre. Ce chapitre a pour but de définir clairement les bases théoriques de la pensée fonctionnelle et de construire un cadre théorique pour les analyses des chapitres suivants. L'orientation binationale de cette thèse fait que le troisième but de ce chapitre est d'unir les concepts théoriques utilisés par la communauté de chercheurs des deux pays pour ainsi participer à l'amélioration de l'échange entre les différentes traditions de recherche.

Un grand nombre de travaux de recherche existent déjà sur l'apprentissage des fonctions et sur le travail sur des situations fonctionnelles. Le quatrième chapitre propose un aperçu des résultats de ces recherches. Ils seront présentés de telle manière qu'on puisse les interpréter avec le cadre théorique développé dans le troisième chapitre et les utiliser pour améliorer les instruments d'analyse. L'utilisation des points forts et des points faibles déjà connus facilite leur identification lors des analyses menées et aide à trouver les raisons de leur apparition ainsi que des propositions de changements.

Les questions de recherche concernant la comparaison des curricula peuvent être formulées de manière précise dans le cinquième chapitre à la suite de ce travail théorique et de la définition claire de la pensée fonctionnelle.

Les deux chapitres suivants sont dédiés à la comparaison des programmes et des livres de classe. Le but est d'éclaircir dans quelle mesure les élèves des deux pays sont aidés dans le développement de la pensée fonctionnelle.

Les deux pays avec leurs systèmes d'enseignement respectifs sont comparés au début du sixième chapitre pour assurer une comparabilité des résultats attendus. Après un court aperçu du développement historique de l'enseignement des fonctions, les programmes actuels de la France et de l'Allemagne (en prenant l'exemple de la Bavière) sont analysés. Tous les niveaux du CM2 à la 2<sup>de</sup> (ce qui correspond à la Sekundarstufe I en Allemagne) et en Bavière tous les différents types d'école sont pris en compte.

L'analyse concernant la possibilité des élèves de développer la pensée fonctionnelle se poursuit dans le septième chapitre avec la comparaison des livres de classe. Des comparaisons détaillées du curriculum potentiel montrent comment les auteurs mettent en pratique les programmes et quels contenus, capacités et idées concernant la pensée fonctionnelle sont exigés.

Il est spécialement intéressant se pencher sur les contenus où l'approche n'est pas la même dans les deux pays. C'est de ces différences que peuvent venir les impulsions pour les changements possibles et elles doivent donc être suivies très attentivement.

Les deux chapitres suivants servent à essayer d'identifier en pratique les points forts et les points faibles reconnus lors des analyses précédentes. Deux approches différentes ont été choisies pour étudier comment les élèves travaillent avec la pensée fonctionnelle et quels problèmes surgissent lors de ce travail.

Des analyses quantitatives sont faites dans le huitième chapitre et amènent à démontrer certaines relations avec les résultats des deux chapitres précédents. Dans la première partie sont présentés les résultats de la sous échelle *variations et relations* de PISA 2003. Des analyses de fonctionnement différentiel de problèmes essayent d'identifier les points forts et les points faibles des deux pays. Dans la seconde partie les résultats de l'étude longitudinale bavaroise PALMA permettent en regardant une sous échelle de voir le développement de la pensée fonctionnelle en Bavière.

Les analyses qualitatives du neuvième chapitre documentent certains points forts et points faibles identifiés dans le sixième et le septième chapitre. Une étude d'interviews réalisée en France et en Allemagne montre grâce à des séquences d'interviews l'effet qu'ont certaines parties spécifiques de la pensée fonctionnelles dans des situations concrètes. Cela permet une compréhension détaillée de certaines réponses d'élèves et forme la base des propositions de changements faites par la suite.

Ces changements sont le contenu de la première partie du dixième chapitre. Sur la base des résultats de ce travail des propositions sont faites pour essayer d'éviter les points faibles des deux pays d'une part et pour chercher à profiter des points forts d'autre part. Finalement un résumé de ce travail met en avant les résultats et ouvre des perspectives pour des recherches futures.





# 1 La pensée fonctionnelle

Il est facile d'associer plusieurs idées et concepts à la *pensée fonctionnelle*. En regardant de près on remarque cependant que sa compréhension intuitive reste souvent vague et que chaque personne y associe des contenus différents. Une définition claire doit donc en être donnée pour pouvoir l'utiliser de manière précise dans ce travail.

## 1.1 Historique de la notion de pensée fonctionnelle

Le concept de *pensée fonctionnelle* (*funktionales Denken* en allemand) a été utilisé pour la première fois en 1905 dans le cadre des réformes de Meran et en devient le fil conducteur. La notion de pensée fonctionnelle y englobe les contenus suivants :

- 1) La définition de la notion de fonction
- 2) Les représentations graphiques
- 3) L'introduction au calcul différentiel et intégral
- 4) Les applications
- 5) « Le principe du mouvement » venant de la « nouvelle géométrie »

C'est en particulier l'aspect de variation de fonction qui y trouve une place importante (Krüger, 2000b, p. 222).

Ces réformes ne sont pas mises en pratique dans toute leur ampleur. Dans les programmes de Prusse de 1925 la pensée fonctionnelle ne désigne plus qu'une introduction fondée de la notion de fonction (Krüger, 2000b, p. 234). Cela permet une réorientation de la pensée fonctionnelle.

En 1932 le mathématicien Ernst Breslich reprend la notion et lui donne les contenus suivants (cité d'après Cha, 1999, p. 43) :

- 1) Recognizing how a change in one of the related variables affects the values of the others,
- 2) Recognizing the character of the relationships between variables,
- 3) Determining the nature of the relationships, and
- 4) Expressing relationships in algebraic symbols.

Il s'agit donc d'une compréhension de la relation entre deux variables et de la capacité d'exprimer cette relation dans la représentation algébrique.

Le didacticien des mathématiques Hans-Joachim Vollrath reprend la notion de *funktionales Denken* plusieurs années plus tard et la définit de manière précise :

To learn about functions and to be successful in using functions to solve problems requires a mental ability which can be characterized as follows:

- 1) Dependences between variables can be stated, postulated, produced and reproduced.
- 2) Assumptions about the dependence can be made, can be tested, and if necessary can be revised

The mental activities described in 1) are fundamental for working with functions ....

The activities in 2) are typical for "mathematical thinking" .... This ability can be called functional thinking.... (Vollrath, 1986a, p. 1)

Une grande importance est accordée à l'aspect de variation. Dans la suite l'auteur précise cette définition en mettant d'avantage l'accent sur la capacité de travailler sur des situations fonctionnelles dans la vie quotidienne. D'autre part le rôle des représentations et des passages d'une représentation à une autre est renforcé.

D'autres auteurs reprennent aussi la notion et y ajoutent certaines caractéristiques, comme de reconnaître « la fonction en soi » ; de plus un nouveau renforcement de l'importance est donné aux représentations et aux passages entre elles.

L'étude PISA 2003 de l'OCDE reprend aussi l'idée mais sans la nommer ainsi. La définition de la sous échelle *variations et relations* englobe plusieurs de ses caractéristiques essentielles.

*Les variations et les relations* – Ce concept a trait aux manifestations mathématiques de l'évolution et aux relations fonctionnelles et de dépendance entre variables. [...]. Elles sont représentées de nombreuses manières différentes (tableaux et représentations symboliques, algébriques, graphiques et géométriques). Comme les modes de représentation peuvent servir des objectifs différents et avoir des propriétés spécifiques, il est souvent essentiel que les élèves passent d'un mode à l'autre lorsqu'ils s'attaquent à des problèmes relevant de cette catégorie. (OECD, 2004c, p. 41)

L'ensemble des ces travaux a influencé la définition utilisée dans ce travail :

## 1.2 Définition de la notion de pensée fonctionnelle

**La pensée fonctionnelle désigne la manière typique de penser lors du travail sur des dépendances fonctionnelles.**

Elle se traduit entre autre par les compétences suivantes :

- 1) Les relations fonctionnelles entre des grandeurs peuvent être détectées, décrites, produites et reproduites dans toutes les représentations usuelles.
- 2) Des hypothèses sur la nature de la relation, spécialement sur l'influence de changements dans une variable, peuvent être faites, testées et révisées, si besoin est.

Le premier point contient la reconnaissance de dépendances fonctionnelles dans toutes ses représentations mathématiques ainsi que dans la réalité. Les passages entre toutes les représentations usuelles (donc entre le tableau de valeurs, la représentation algébrique, la

représentation graphique ainsi que les descriptions proches de la réalité) sont utilisés lors de la résolution de problèmes ou pour des besoins de représentation. Le caractère unique des fonctions ainsi que leur aspect de covariation, mentionné dans le second point, sont connus.

En choisissant de parler de *dépendance fonctionnelle* et pas de *fonction*, on a pu éviter la restriction à l'aspect purement mathématique et l'accent a été mis sur l'application à la réalité. Il n'est pas exigé de pouvoir utiliser les fonctions comme des objets pour avoir une pensée fonctionnelle. Cette vision implique une connaissance plus approfondie des fonctions. Il y a cependant dans plusieurs problèmes une utilisation implicite de la fonction en tant qu'objet, ce qui fait qu'une certaine compréhension de l'objet est nécessaire pour pouvoir développer la pensée fonctionnelle. (Voir chapitre 3)

Plusieurs notions et concepts utilisés dans le choix de cette définition de la pensée fonctionnelle proviennent de la recherche actuelle et se recoupent avec d'autres notions. Ces liens et les choix de la définition sont expliqués dans les chapitres trois et quatre de ce travail.



## 2 Aperçu historique

Le développement de la définition de la notion de fonction est un processus qui a pris plusieurs siècles. La définition actuelle venant de la théorie des ensembles n'était pas encore connue quand les fonctions sont apparues pour la première fois dans les classes françaises et allemandes au début du vingtième siècle. C'est seulement dans les années 70, dans le cadre des nouvelles mathématiques, qu'elle allait faire son entrée dans les classes (Voir chapitre 6).

Plusieurs idées que les élèves actuels ont des fonctions peuvent être retrouvées dans le développement historique de la notion de fonction. Ce chapitre donne un aperçu de ce développement en regardant spécialement l'importance donnée aux différentes représentations. Pour une description plus détaillée le lecteur est renvoyé à d'autres articles sur ce sujet (par exemple Kleiner, 1989; Rüthing, 1986; Youschkevitch, 1976).

Le développement historique de la notion de fonction peut être divisé en deux parties. La notion de fonction n'est utilisée qu'implicitement pendant la première période, qui dure jusqu'au dix-huitième siècle, et les représentations de fonctions ne sont pas encore toutes reliées à cette notion.

La seconde période commence dans la première moitié du dix-huitième siècle. Une première définition de la notion de fonction est donnée à ce moment là, mais elle est encore soumise à de nombreux changements, raffinements et précisions dans les siècles suivants.

### 2.1 Tableaux, graphiques et formules

Les premières utilisations de relations fonctionnelles peuvent être trouvées chez les Babyloniens en 2000 avant Jésus Christ. Des tableaux étaient utilisés pour faciliter certains calculs concernant, par exemple, l'utilisation de nombres carrés et cubiques.

Dans les siècles suivants, jusqu'à la fin du 14<sup>ième</sup> siècle, l'utilisation de fonction reste implicite lors du travail avec les tableaux ou les descriptions verbales. La conception des relations fonctionnelles est essentiellement discrète et il y a une règle de calcul dominante. Association unique ou covariation ne sont pas utilisées ou seulement de manière implicite.

Le premier graphique connu montre la position des planètes en dépendance du temps et date du 10<sup>ième</sup> ou 11<sup>ième</sup> siècle (Figure 1 Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.).

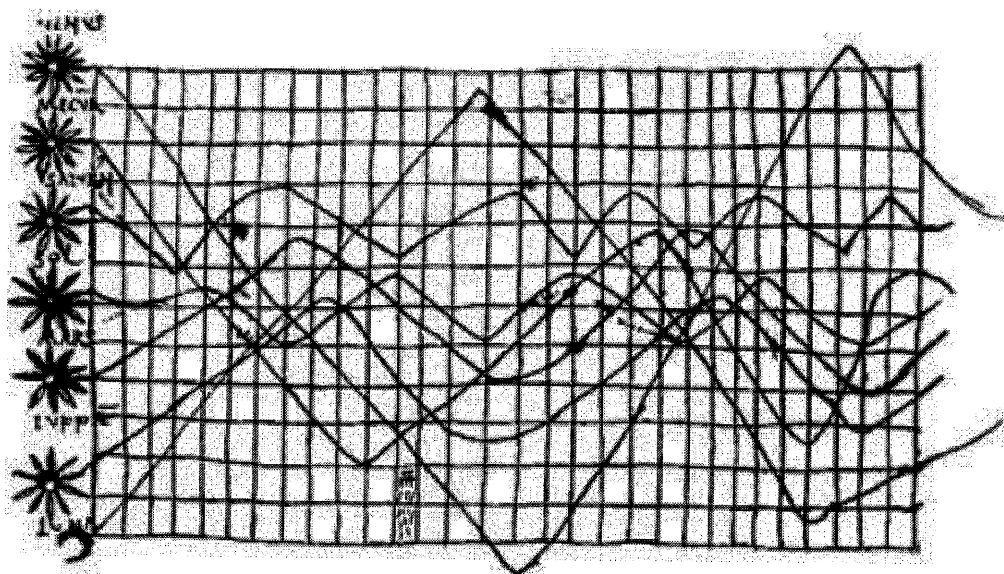


Figure 1: Position des planètes, 10<sup>ème</sup> ou 11<sup>ème</sup> siècle (Hischer , 2002)

Au 14<sup>ème</sup> siècle Nicole Oresme (1323-1382) étudie les courbes et l'aspect de variations des relations fonctionnelles. Les graphiques qu'il utilise rappellent les diagrammes à barre et montrent la variation d'intensités en dépendance du temps (Figure 2). Comme il est habituel aujourd'hui, le temps est noté sur l'axe horizontal. Oresme ne s'intéresse pas seulement à l'association des points donnée par la longueur des barres, mais il parle de grandeurs variant de manière continue et étudie les formes géométriques constituées par les barres. Bien qu'il n'introduise pas de définition de la notion de fonction, cette utilisation d'une nouvelle représentation et des variations marque un pas important sur le chemin du développement de cette notion.

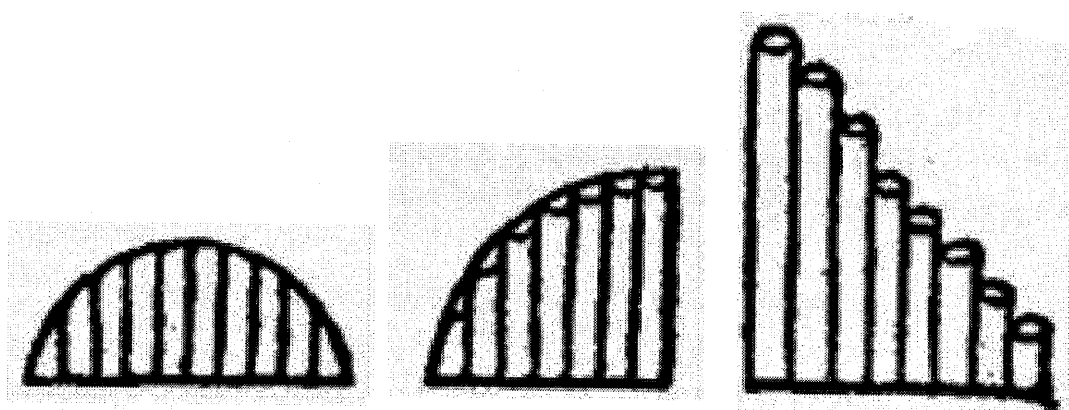


Figure 2: Diagrammes de Oresme, 14<sup>ème</sup> siècle (Hischer, 2002)

Au 17<sup>ème</sup> siècle Pierre de Fermat (1601-1665) et René Descartes (1596-1650) développent indépendamment l'un de l'autre l'écriture algébrique sur la base de travaux de François Viète (1540-1603).

A partir du 17<sup>ème</sup> siècle les représentations usuelles d'aujourd'hui sont connues et reliées entre elles. Cela permet une accélération du développement de la notion de fonction.

Gottfried Leibniz (1646-1716) utilise le premier 1673 le mot *fonction* et développe ce concept avec Johann Bernoulli (1667-1748) qui en donne une première définition dans une lettre en 1718 :

On appelle fonction d'une grandeur variable, une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes (d'après Youschkevitch, 1976)

Il s'agit donc d'une expression algébrique qui permet de déterminer une grandeur en en connaissant une autre. L'expression algébrique est mise en avant et plusieurs points, comme la signification exacte de « composée de quelque manière », sont à clarifier. Cela est le point de départ d'un processus de précision de la notion de fonction qui va durer deux siècles. D'une part la notion va être restreinte en enlevant les fonctions non uniques et d'autre part élargie en admettant des fonctions sans représentation algébrique.

## 2.2 L'affinement de la définition de fonction

Leonhard Euler (1707-1783), un étudiant de Bernoulli, contribue de manière décisive au développement de la notion de fonction. En 1748 il reformule la définition d'Euler dans son livre « Introduction in analysin infinitorum » en remplaçant « grandeur » par expression analytique :

Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque manière que ce soit, de cette même quantité et de nombres, ou de quantités constantes.

Euler s'éloigne donc de la représentation graphique et rapproche la notion de fonction à sa représentation algébrique en utilisant « expression analytique ». Il n'est cependant pas clair ce que veut dire exactement « expression analytique ».

En 1755 Euler se distancie de sa définition étroitement liée à la représentation algébrique et reprend dans « Institutiones calculi differentialis » plus explicitement l'aspect de variation.

Si certaines quantités dépendent d'autres quantités de telle manière que si les autres changent, ces quantités changent aussi, alors on nomme ces quantités fonctions de ces dernières ; cette dénomination a la plus grande étendue et contient toutes les manières par lesquelles une quantité peut être déterminée par une autre.

Cette définition est utilisée jusqu'au début du 19<sup>ème</sup> siècle. Plusieurs fonctions, dont la représentation algébrique était compatible avec la définition utilisée, mais dont la représentation graphique n'était pas acceptable à cette époque, sont découvertes à ce moment là, entre autre, par Jean-Baptiste Fourier (1768-1830). L'absence de la continuité attendue devient claire dans la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} = \begin{cases} 1 \text{ pour } x \in ]2k\pi; (2k+1)\pi[, \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ 0 \text{ pour } x \in \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \\ -1 \text{ pour } x \in ](2k-1)\pi; 2k\pi[, \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) publie en 1829 une fonction qui n'est continue en aucun point :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{quand } x \text{ est rationnel} \\ 0, & \text{quand } x \text{ est irrationnel} \end{cases}$$

En 1837 il donne une définition qui est basée pour la première fois sur l'association unique. Mais cette définition inclut seulement les fonctions continues.

La première définition générale est donnée par Hermann Hankel (1839-1873) en 1870. Elle est connue sous le nom de *définition de Dirichlet* :

On dit que  $y$  est fonction de  $x$ , si à chaque valeur de  $x$  d'un certain intervalle correspond une valeur bien définie de  $y$ , sans que cela exige pour autant que  $y$  soit définie sur tout l'intervalle par la même loi en fonction de  $x$ , ni même que  $y$  soit définie par une expression algébrique de  $x$ .

Cette définition demande l'unicité, sépare la notion de fonction de la continuité et ne se réfère plus à la représentation algébrique ou la représentation graphique. Les restrictions concernant le domaine de définition et le domaine de valeurs sont finalement abolies dans la définition utilisant les termes de la théorie des ensembles donnée par Felix Hausdorff (1862-1942) en 1914 dans « Grundzügen der Mengenlehre ».

De deux ensembles non nuls  $A$  et  $B$  nous pouvons former des paires ordonnées  $p=(a,b)$ , dont le premier élément  $a$  est élément de  $A$  et dont le second élément  $b$  est élément de  $B$ . ... Étudions l'ensemble  $P$  des paires, qui sont formées de telle manière, que chaque élément  $a$  de  $A$  n'apparaisse que dans une paire  $p$  de  $P$  comme premier élément. Chaque élément  $a$  définit de telle manière un élément  $b$  unique, à savoir celui auquel il est relié dans une paire  $p=(a,b)$  ; Nous noterons cet élément défini par  $a$ , dépendant de  $a$  et associé à  $a$  par  $b=f(a)$  et nous dirons que de cette manière une fonction unique est définie dans  $A$  sur  $a$ .

Avec cette définition, une définition de fonction très abstraite a été atteinte. Les représentations graphiques et algébriques ne sont plus mentionnées. Il n'est pas non plus question de variation ou de dépendance, il s'agit plutôt d'une définition statique en tant que relation unique à droite, qui peut être comprise en tant qu'association entre deux ensembles abstraits.

Ce résumé montre que l'utilisation de la représentation algébrique et des passages entre les différentes représentations a permis de faire avancer rapidement le développement de la notion de fonction. La première définition de la notion de fonction reste encore assez proche de la représentation algébrique, mais il est clair que le détachement de la notion de fonction de ses représentations a permis au fil des siècles d'arriver à une définition très précise.

Date	Découvreur	Découverte, innovation	Image des fonctions
2000 avant. J. C.	Babyloniens	Tableau	Règle de calcul, discret
14 <sup>ième</sup> siècle	Oresme	Graphique	Aspect de variation
17 <sup>ième</sup> siècle	Fermat Descartes	Formule	Expression algébrique Formule avec de opérations mathématiques simples Pas forcément unique Pas de définition
1718	Bernoulli	Expression algébrique Première définition	Expression algébrique de grandeurs variables Pas forcément unique
1748	Euler	Expression analytique	Expression algébrique de grandeurs variables Pas forcément unique Les fonctions constantes ne sont pas admises
1755	Euler	Covariation Courbe tracée à main levée	Dépendance quelconque entre des grandeurs Plus forcément une expression analytique Implicitement : Le graphique est ascendant et n'a pas d'angles
1870	Hankel Définition de Dirichlet	Association unique Covariation	Dépendance quelconque Plus forcément continue ou représentable par une formule ou un graphique
1914	Hausdorff	Association unique entre ensembles	Relation unique à droite. Définition venant de la théorie des ensembles Domaine de définition et domaine de valeurs N'est pas forcément représentable comme graphique ou comme formule Covariation et dépendance ne sont plus citées explicitement

Tableau 1: Résumé



### 3 Cadre théorique

Ce chapitre a trois buts principaux. Le premier est de faire ressortir clairement les bases théoriques des choix faits lors de la définition de pensée fonctionnelle. Le second est de développer les instruments qui vont être utilisés dans les analyses des chapitres suivants. Et le troisième est finalement de mettre en évidence les concepts théoriques utilisés en France, en Allemagne ainsi que dans la recherche internationale et d'essayer de créer des liens entre ceux-ci.

Au début l'analyse des travaux de Duval, Lesh et de Kaput concerne les représentations d'idées mathématiques et les passages entre elles. Ensuite les champs conceptuels de Vergnaud donnent un socle théorique à la pensée fonctionnelle et les Grundvorstellungen de vom Hofe ainsi que les Grundkenntnisse nouvellement définies permettent de la connecter à des idées et à des savoirs. A la fin d'autres concepts étroitement liés à la pensée fonctionnelle sont présentés, comme par exemple l'action concept, le process concept et l'object concept de Dubinsky ou le concept image de Vinner. Ils sont reliés au cadre de ce travail de telle manière qu'ils puissent être utilisés lors des analyses des chapitres suivants.

La seconde et la troisième partie de ce chapitre traitent en détail des différentes représentations des relations fonctionnelles, des passages entre elles et de la définition de la notion de fonction. Cette compréhension précise est nécessaire pour pouvoir faire les analyses des chapitres suivants.

#### 3.1 Base théorique

##### 3.1.1 Approche sémiotique : les registres sémiotiques de Duval

La définition de la pensée fonctionnelle reprend plusieurs aspects importants des travaux de Raymond Duval, qui fait de la recherche en sémiotiques et spécialement sur le passage entre différentes représentations d'un objet mathématique.

D'après Duval, il est nécessaire de connaître plusieurs représentations d'un même objet mathématique et de pouvoir effectuer des passages entre ces représentations pour être réellement capable de le cerner.

... (I)l est essentiel, dans l'activité mathématique, soit de pouvoir mobiliser plusieurs registres de représentation sémiotiques ..., soit de pouvoir choisir un registre plutôt que l'autre. Et, indépendamment de toute commodité de traitement, *ce recours à plusieurs registres semble même une condition nécessaire pour que les objets mathématiques ne soient pas confondus avec leurs représentations et qu'ils puissent aussi être reconnus dans chacune de leurs représentations.* (Duval, 1993, p. 40)

Cette idée a été reprise lors de la définition de la pensée fonctionnelle en insistant sur l'importance du fait de pouvoir utiliser toutes les représentations usuelles et d'effectuer les passages entre elles.

Raymond Duval travaille sur les *registres de représentations sémiotiques* (en abrégé : registres) (Duval, 1993; Duval, 1996; Duval, 2006). Les registres principalement utilisés lors du travail avec les fonctions sont :

1. Le registre algébrique
2. Le registre graphique
3. Le registre des tableaux
4. Le registre du langage parlé

Le registre du langage parlé est un registre très complexe et ne peut pas être pris en compte dans toute sa profondeur dans ce travail. Les descriptions verbales des relations fonctionnelles qui apparaissent en cours sont souvent déjà des concentrations et des abstractions des descriptions verbales utilisées dans la vie quotidienne. De plus elles sont dans beaucoup de cas accompagnées d'images, ce qui est aussi le cas dans la vie quotidienne.

En accord avec Duval, d'autres auteurs ayant des approches différentes, comme Richard Lesh (Lesh et al., 1987) et al. et James Kaput (Kaput, 1989), donnent un poids important aux représentations dans les différents registres et aux passages entre ceux-ci lors de l'étude de la pensée fonctionnelle. Tous voient ici la clef de la compréhension d'une idée mathématique.

### **3.1.2 Approche psychologique : les champs conceptuels de Vergnaud**

Avec la théorie des *champs conceptuels* Gérard Vergnaud a créé un outil d'analyse pour le développement des compétences mathématiques, basé sur des idées psychologiques (Vergnaud, 1990; Vergnaud, 1996).

Le champ conceptuel des situations fonctionnelles est constitué de toutes les situations dans lesquelles des dépendances fonctionnelles sont représentées. Les concepts qui sont reliés à ce champ sont nombreux : naturellement le concept de fonction, mais aussi les concepts des opérations sur des nombres, d'équation, de relation, de variation, de variable, d'inconnue, de dérivée, d'intégrale, ...

Mais il est également possible de définir un champ conceptuel plus restreint concernant les fonctions. On peut, par exemple, regarder le champ conceptuel des relations fonctionnelles simples, qui est contenu dans le champ conceptuel des situations fonctionnelles. Ce champ est défini de telle manière qu'il est créé par les situations dans lesquelles apparaissent seulement certains types de fonctions (comme les fonctions affines, les polynômes de bas degré et les fonctions exponentielles) et certains concepts simples (donc, par exemple, ni le concept de dérivée ni celui d'intégrale).

Le mode de pensée nécessaire pour pouvoir maîtriser ce champ conceptuel recoupe en grande partie celui de la pensée fonctionnelle. La définition de pensée fonctionnelle ne contient pas de restrictions concernant les fonctions. La restriction du champ conceptuel a été faite parce que la pensée fonctionnelle requiert la connaissance d'un certain nombre de types de fonctions mais pas de toutes. Il s'agit donc d'un champ conceptuel minimal, dont les situations demandent une pensée fonctionnelle pour pouvoir être traitées.

Du point de vue du présent travail la question se pose de savoir comment ce champ conceptuel minimal est utilisé dans les classes en France et en Allemagne.

### 3.1.3 Approche constructiviste : Grundvorstellungen de vom Hofe et Grundkenntnisse

Avec le concept des *Grundvorstellungen* Rudolf vom Hofe propose un outil, avec lequel on peut aussi bien donner des buts normatifs pour des contenus mathématiques spécifiques qu'analyser de manière descriptive des solutions d'élèves (Grund = base, fond, raison ; Vorstellung = idée, imagination, conception ; Grundvorstellung = idée de base). Ce concept a une longue tradition en didactique des mathématiques en Allemagne dans les travaux de Pestalozzi (1803), Diesterweg (1850), Wittmann (1924), Oehl (1965) et Griesel (1971) (pour seulement en citer une partie, voire vom Hofe, 1995, p. 23). Du côté international on peut retrouver des concepts similaires dans les *intuitive meanings* de Fischbein ou les *use meanings* de Usiskin (vom Hofe, 1995, p. 99).

Dans la suite il va être démontré comment les Grundvorstellungen se relient aux théories citées jusqu'ici et comment elles peuvent être utilisées pour l'analyse de la pensée fonctionnelle. La notion de *Grundkenntnis* est également introduite et s'avère être un bon complément aux Grundvorstellungen.

#### 3.1.3.1 Grundvorstellungen

L'idée de Grundvorstellungen décrit la relation entre les contenus mathématiques et le phénomène de conceptualisation individuelle. Dans ses différentes facettes elle caractérise de différents points de vue trois aspects de ce phénomène :

Construction de sens pour un concept en le reliant à des situations ou des actions connues, ou bien à des représentations d'actions.

Construction d'une représentation (visuelle) ou intériorisation, qui permet des actions au niveau de l'imagination.

Capacité d'appliquer le concept à la réalité en reconnaissant la structure correspondante dans des situations ou en modélisant le problème dans la réalité avec l'aide de la structure mathématique.

(d'après vom Hofe, 1995, p. 97)

Les Grundvorstellungen forment le lien entre l'individu, le contenu mathématique et son application dans la réalité, ce qui les rend indispensables pour tout passage entre des représentations. Elles ne sont pas stables dans le temps et se développent, interagissent ou doivent être reformulées pendant le processus d'apprentissage.

On peut identifier deux aspects des Grundvorstellungen (vom Hofe, 1995; Blum, 2002) :

1. *Aspect normatif.* Les Grundvorstellungen sont déduites de réflexions théoriques concernant le contenu mathématique et les analyses didactiques. Elles forment un fil conducteur didactique de ce que les élèves devraient apprendre.
2. *Aspect descriptif.* Les Grundvorstellungen décrivent les idées que les élèves ont réellement. Dans l'idéal les Grundvorstellungen observées correspondent aux Grundvorstellungen déterminées de manière normative, mais ce n'est pas toujours le cas. Au contraire de l'aspect normatif, l'aspect descriptif des Grundvorstellungen permet aussi des idées mathématiquement fausses, des *Fehlvorstellungen* (Grundvorstellungen fausses).

Des exemples de Grundvorstellungen sont l'idée de fonction en tant qu'association (unique) ou l'idée de fonction en tant que deux variables covariantes. Ces Grundvorstellungen forment le lien entre la représentation mentale des élèves, le concept de fonction et les situations réelles, dans lesquelles les dépendances fonctionnelles apparaissent comme des associations ou des covariations.

Il peut y avoir plusieurs Grundvorstellungen concernant un concept mathématique qui se complètent. Leur combinaison et interaction mène à une compréhension approfondie du concept étudié voire même à la formation de ce concept. C'est donc un but principal de l'enseignement des mathématiques d'aider les élèves à former un réseau de Grundvorstellungen adéquates (vom Hofe et al., 2005, p. 69).

La théorie des Grundvorstellungen contient aussi un aspect constructiviste. Dans le cas de la différence entre les Grundvorstellungen déterminées de manière normative et des Grundvorstellungen constatées de manière descriptive, ces différences peuvent être palliées ou bien de nouvelles Grundvorstellungen peuvent être construites. Ceci doit naturellement être fait par les élèves, mais ils peuvent être aidés par le choix de situations appropriées, auxquelles ils sont confrontés. (vom Hofe, 1995, p. 123)

La description de Grundvorstellungen donnée ici contient un lien avec des situations réelles. Un élargissement du concept de Grundvorstellungen est de remplacer l'application dans la réalité par une représentation dans un registre quelconque. Cela permet d'utiliser les Grundvorstellungen pour expliquer tout type de passages entre deux registres. Pour les différencier des Grundvorstellungen initiales, les *Grundvorstellungen primaires*, ce type de Grundvorstellung est appelé *Grundvorstellung secondaire*. Dans ce cas les Grundvorstellungen forment un lien entre l'individu, le contenu mathématique et un registre de représentation.

Les Grundvorstellungen primaires surviennent lors du passage entre la mathématique et la réalité, tandis que les Grundvorstellungen secondaires se réfèrent aussi à des passages entre différentes représentations mathématiques. La plupart des Grundvorstellungen concernant les situations fonctionnelles sont donc des Grundvorstellungen secondaires.

Les Grundvorstellungen concernant les fonctions peuvent être divisées en deux groupes. Le premier groupe est constitué de Grundvorstellungen concernant des aspects de la pensée

fonctionnelle. Le second groupe consiste en celles qui résultent des différentes représentations de fonctions.

### **Grundvorstellungen concernant des aspects de la pensée fonctionnelle :**

#### **1. Grundvorstellung d'association**

Une variable est associée à une autre. Cela peut être exprimé de manière informelle par « pour chaque ... il y a ... »

Cette Grundvorstellung accentue l'aspect unique des dépendances fonctionnelles, mais elle ne contient pas, ou que très peu, l'idée de covariation ou de dépendance.

Un exemple, dans lequel cette Grundvorstellung apparaît clairement est la fonction qui associe à chaque élève son âge.

#### **2. Grundvorstellung de covariation**

Une variable varie en fonction d'une autre. Cela peut être exprimé de manière informelle par « Que se passe-t-il quand ... »

Cette Grundvorstellung accentue l'aspect de variation comme l'indique son nom. L'aspect unique des dépendances fonctionnelles y est seulement inclut de manière implicite.

Une situation typique où la Grundvorstellung de covariation est utilisée est la variation de l'aire d'un rectangle à circonférence constante en fonction de la longueur d'un côté.

Cette Grundvorstellung est spécialement importante à cause d'un de ses différents aspects. En imaginant la covariation il devient possible d'effectuer une variation systématique et ainsi de comprendre la nature de la variation et d'identifier le type de fonction analysée.

#### **3. Grundvorstellung d'objet**

Une fonction est un objet avec lequel on peut travailler.

Cette Grundvorstellung doit être située à un niveau nettement supérieur aux deux autres. Des situations typiques dans lesquelles elle est utilisée sont l'addition de fonctions, la connexion de deux fonctions ou les équations différentielles.

Il est cependant possible de manier des objets fonction sans avoir une Grundvorstellung d'objet. Mais la Grundvorstellung d'objet permet le travail réfléchi avec des processus qui agissent sur un ensemble de fonctions.

Dans beaucoup de situations il est possible et nécessaire d'activer plusieurs de ces Grundvorstellungen. On peut aussi remarquer que certaines représentations favorisent certaines Grundvorstellungen. Par exemple les tableaux mettent en avant l'aspect d'association, alors que les représentations graphiques accentuent l'aspect de covariation. Cela veut dire que les différents registres de représentations des dépendances fonctionnelles ont une influence importante sur l'activation des Grundvorstellungen.

D'un autre côté c'est seulement la Grundvorstellung de dépendances fonctionnelles dans une certaine représentation qui permet d'utiliser cette même représentation. De là peut être identifié un second groupe de Grundvorstellungen.



Les trois Grundvorstellungen citées plus haut concernent des aspects de la pensée fonctionnelle. Les Grundvorstellungen du second groupe concernent des représentations des dépendances fonctionnelles.

Quand un élève a formé la Grundvorstellung concernant un registre de représentations il peut utiliser celui-ci pour y opérer mentalement et pour y représenter des dépendances fonctionnelles.

Ces Grundvorstellungen du second groupe ont cependant un rayon d'action limité : il se limite à l'ensemble des dépendances fonctionnelles qui peuvent être représentées dans ce registre de représentation. Il n'est par exemple pas possible de représenter dans le registre algébrique la fonction associant la couleur de cheveux à chaque élève.

#### **Grundvorstellungen en relation avec les différentes représentations :**

4. Grundvorstellung d'une relation fonctionnelle en tant que formule dans le registre algébrique

Le registre de représentation algébrique peut être utilisé pour représenter certaines dépendances fonctionnelles.

5. Grundvorstellung d'une relation fonctionnelle en tant que courbe dans le registre graphique

Le registre de représentation graphique peut être utilisé pour représenter certaines dépendances fonctionnelles.

6. Grundvorstellung d'une relation fonctionnelle en tant que tableau dans le registre des tableaux

Le registre de représentation des tableaux peut être utilisé pour représenter certaines dépendances fonctionnelles.

7. Grundvorstellung d'une relation fonctionnelle en tant que paire ordonnée

Le registre de représentation des paires ordonnées peut être utilisé pour représenter certaines dépendances fonctionnelles.

Cette Grundvorstellung est notée ici pour des raisons historiques. Elle n'est pratiquement plus utilisée en classe. (voire chapitre 6 et 7)

Ces Grundvorstellungen peuvent bien sûr aussi être activées quand on a une représentation d'un objet dans un registre de représentation sémiotique et qu'il s'agit de vérifier s'il s'agit d'une dépendance fonctionnelle.

Les Grundvorstellungen en relation avec les différentes représentations permettent donc de connecter une représentation à une dépendance fonctionnelle et, dans l'autre sens, d'identifier une dépendance fonctionnelle dans un objet représenté.

Il existe bien sûr encore d'autres Grundvorstellungen concernant des registres de représentations sémiotiques. Ceux mentionnés en haut sont cependant les plus utilisés lors du travail avec les fonctions dans les salles de classe.

Dans le chapitre 2, il a été montré que la notion de fonction s'était développée grâce à des nouvelles représentations et aux idées reliées à celles-ci. Les tableaux des premières situations fonctionnelles connues peuvent être vus comme un premier développement de la Grundvorstellung d'association. La Grundvorstellung de covariation a également longtemps marqué le développement de la notion de fonction. Mais c'est seulement la combinaison de plusieurs Grundvorstellungen concernant des aspects de la pensée fonctionnelle et la formation d'un large choix de Grundvorstellungen en relation avec les différentes représentations, qui a permis l'aboutissement à la définition de fonction connue aujourd'hui.

Les Grundvorstellungen concernant des aspects de la pensée fonctionnelle ne peuvent pas être utilisées sans les Grundvorstellungen en relation avec les différentes représentations. Mais dans l'autre sens, les Grundvorstellungen en relation avec les différentes représentations, ne peuvent pas être formées sans une Grundvorstellung concernant des aspects de la pensée fonctionnelle. Il y a donc une liaison et une interdépendance étroite entre ces deux groupes.

Tout un réseau de différentes Grundvorstellungen est à mettre en relation avec la pensée fonctionnelle. Il s'agit concrètement des Grundvorstellungen en relation avec les concepts qui font partie du champ conceptuel de la pensée fonctionnelle (voir plus haut). Dans le cadre de ce travail seules les Grundvorstellungen en relation directe avec le concept de fonction sont étudiées en détail.

### 3.1.3.2 Grundkenntnisse

Lors des passages concrets entre une représentation dans un registre et une représentation dans un autre les Grundvorstellungen doivent être utilisées dans des situations constituées de certains concepts et objets. Pour faire ceci, il est nécessaire d'utiliser des connaissances spécifiques sur les propriétés des objets et des concepts en relation avec une Grundvorstellung. Ces connaissances sont appelées *Grundkenntnisse* (Kenntnis=connaissance) pour marquer leur relation étroite avec les Grundvorstellungen. Ce sont donc des connaissances sur les effets des propriétés d'un objet ou d'un concept mathématique lors du passage entre deux représentations. Mais les Grundkenntnisse peuvent aussi être perçues comme des concrétisations de Grundvorstellungen. Une ou plusieurs Grundvorstellungen se concrétisent dans une certaine situation de telle manière à être utilisable directement dans le processus de passage entre les différentes représentations.

Des exemples de Grundkenntnisse sont :

1. Le signe de  $a$  dans la représentation algébrique  $f(x)=ax+b$  indique si la représentation graphique de la fonction affine monte ou descend (lu de gauche à droite).  
(Il s'agit d'une connaissance utile pour le passage entre la représentation algébrique et la représentation graphique. Elle peut être vue comme une concrétisation de la Grundvorstellung de covariation (Grundvorstellung (abréviation GV) 2) et de la Grundvorstellung d'une relation fonctionnelle en tant que courbe (GV 4) lors du travail sur les fonctions affines.)
2. La représentation graphique d'une fonction affine est une droite  
(Connaissance utile pour le passage venant de la représentation graphique ou allant

vers elle. Concrétisation de la Grundvorstellung d'une relation fonctionnelle en tant que courbe (GV 4) lors du travail sur les fonctions affines)

3. Une des caractéristiques des fonctions affines est qu'un changement dans une variable fait toujours changer l'autre variable de la même manière. (Les accroissements sont constants.  $f(x+n)-f(x)=f(n)-f(0)$ )  
(Connaissance utile lors du passage venant de la réalité ou allant vers elle. Concrétisation de la Grundvorstellung de covariation lors du travail sur les fonctions affines)

Les Grundkenntnis peuvent être intériorisées de deux manières différentes par les élèves. On trouve d'une part des Grundkenntnis intériorisées sans contexte (*Grundkenntnis inerte*), qui sont apprises par cœur sans lien avec des Grundvorstellungen. D'autre part des Grundkenntnis qui ont été intériorisées en relation avec des Grundvorstellungen (*Grundkenntnis intelligente*), qui sont liées étroitement aux Grundvorstellungen pertinentes. Les Grundvorstellungen se concrétisent dans des Grundkenntnis intelligentes et les Grundkenntnis intelligentes peuvent être abstraites pour arriver aux Grundvorstellungen. La différenciation entre les Grundkenntnis inertes et les Grundkenntnis intelligentes peut être reliée à la compréhension instrumentale et la compréhension relationnelle de Richard Skemp (Skemp, 1976, p. 23).

Les changements de registres demandés par Duval sont implicitement contenus dans le concept des Grundvorstellungen sans y être détaillés. Celui-ci se concentre sur les passages concrets et sur les idées nécessaires pour les réaliser.

Les Grundkenntnis identifiées pour certains changements de registres ont aussi été identifiées par Duval. Il n'explique cependant pas comment ces connaissances sont activées. L'activation des connaissances est faite par les Grundvorstellungen. Les registres de Duval, les Grundvorstellungen et les Grundkenntnis se complètent donc.

Vergnaud identifie des relations de base pour classer les situations et les relie aux *intuitive meanings* de Fischbein. Cela rappelle fortement l'aspect normatif des Grundvorstellungen. Mais Vergnaud les utilise seulement pour construire un ensemble de situations. Les relations de base y sont donc un lien entre un contenu mathématique et les situations. Les Grundvorstellungen incluent en plus l'individu.

Selon la théorie de vom Hofe les situations sont utilisées pour comprendre les relations de base correspondantes. Ce processus est appelé la création de Grundvorstellungen. Cette relation entre relation de base et situations n'est pas relevée par Vergnaud. On peut cependant poser la question de savoir si ce ne sont pas les relations de base/Grundvorstellungen qui permettent aux élèves de classer les situations dans une catégorie de situations et d'activer ainsi des schèmes ? Mais ceci équivaut à dire que ce sont les relations de base qui activent les schèmes.

Les Grundkenntnis se recoupent en grande partie avec les théorèmes-en-acte de Vergnaud. Tous deux permettent l'utilisation des théorèmes mathématiques dans des situations concrètes. Mais l'accent est mis sur différents aspects dans les deux cas. Les théorèmes-en-acte accentuent la relation entre une situation et la formulation concrète d'un théorème ou

d'une opération mathématique pour cette situation. L'existence d'un théorème-en-acte permet le choix d'un théorème ou d'une opération pour une situation.

Les Grundkenntnisse par contre se basent sur les Grundvorstellungen. Elles permettent l'application concrète des Grundvorstellungen complexes en rendant accessible les propriétés résultantes des théorèmes mathématiques.

La pensée fonctionnelle contient la reconnaissance de situations fonctionnelles et les passages entre les différentes représentations. Ceci représente aussi deux des points centraux du concept des Grundvorstellungen. Une bonne base de Grundvorstellungen est indispensable pour pouvoir développer la pensée fonctionnelle.

Le développement de Grundvorstellungen et de Grundkenntnisse est fortement influencé par les situations sur lesquelles travaillent les élèves. Les analyses des programmes et spécialement des livres de classe des chapitres 6 et 7 permettent de voir quelles Grundvorstellungen y sont renforcées. Les analyses des interviews et des résultats de PISA montrent par contre quelles Grundvorstellungen ont effectivement été développées par les élèves.

### 3.1.4 Autres théories utilisées

Les théories d'Ed Dubinsky et d'Ana Sfard permettent de montrer que la pensée fonctionnelle englobe le concept d'action et le concept de processus des fonctions. Par contre le concept d'objet ou la réification montrent les limites de la notion de pensée fonctionnelle. (Dubinsky & Harel, 1992; Breidenbach et al., 1992; Sfard, 1989; Sfard, 1991)

Les travaux de Shlomo Vinner s'avèrent d'une grande utilité lors des analyses faites dans les chapitres suivants. Il définit le *concept image* et le *concept définition*, qui permettent une description précise de ce que les élèves associent avec des concepts mathématiques comme les fonctions.

Le *concept image* en relation avec un concept mathématique est l'ensemble de la structure cognitive, qui est associée à ce concept. Cela inclut toutes les images mentales (c'est-à-dire toutes les représentations générales et spécifiques) et leurs propriétés (Vinner & Dreyfus, 1989, p. 356). Le concept image est formé sur une longue durée de manière différente par les multiples expériences personnelles de chaque élève et peut aussi contenir des éléments faux, restreignant ou se contredisant. Vinner note sur l'importance du concept image :

My basic assumption is that to acquire a concept means to form a concept image for its name.  
(Vinner, 1992, p. 197)

Le *concept définition* est une définition textuelle d'un concept. Elle peut être apprise par cœur ou comprise, elle peut être juste ou fausse et elle peut aussi être un essai personnel de définition de la part de l'élève utilisant son concept image. Le concept définition est donc une définition individuelle variante, qui ne doit pas être confondue avec la définition formelle. Elle peut générer des idées et des images qui feront partie du concept image de l'élève.

Une difficulté associée à la relation entre concept image et concept définition est la situation, quand le concept définition n'est pas en lien étroit avec le concept image. Dans ce cas les

élèves peuvent montrer des comportements inconsistants. On parle alors de *compartmentalization* (Vinner & Dreyfus, 1989, p. 356). D'après Vinner ce phénomène se montre notamment quand un concept est introduit par une définition abstraite avant que les élèves aient pu développer un concept image.

Les Grundvorstellungen et Grundkenntnisse font partie du concept image et le constituent. Tant que le concept image ne contient pas de Grundvorstellungen et de Grundkenntnisse il ne peut pas être utilisé de manière effective pour résoudre des problèmes. Mais le concept image englobe aussi des exemples et des images concrètes, que l'élève associe avec un concept.

Il est donc nécessaire de construire un concept image large pour pouvoir développer une pensée fonctionnelle. Certaines restrictions concernant par exemple des associations entre des ensembles abstraits ne vont probablement pas empêcher le développement de la pensée fonctionnelle. Mais si par exemple le concept image d'un élève ne permet pas d'autres représentations que la représentation algébrique, il ne pourra pas développer de compréhension pour les passages entre les registres. L'élève pourra seulement reconnaître et représenter des relations fonctionnelles dans un registre de représentation sémiotique.

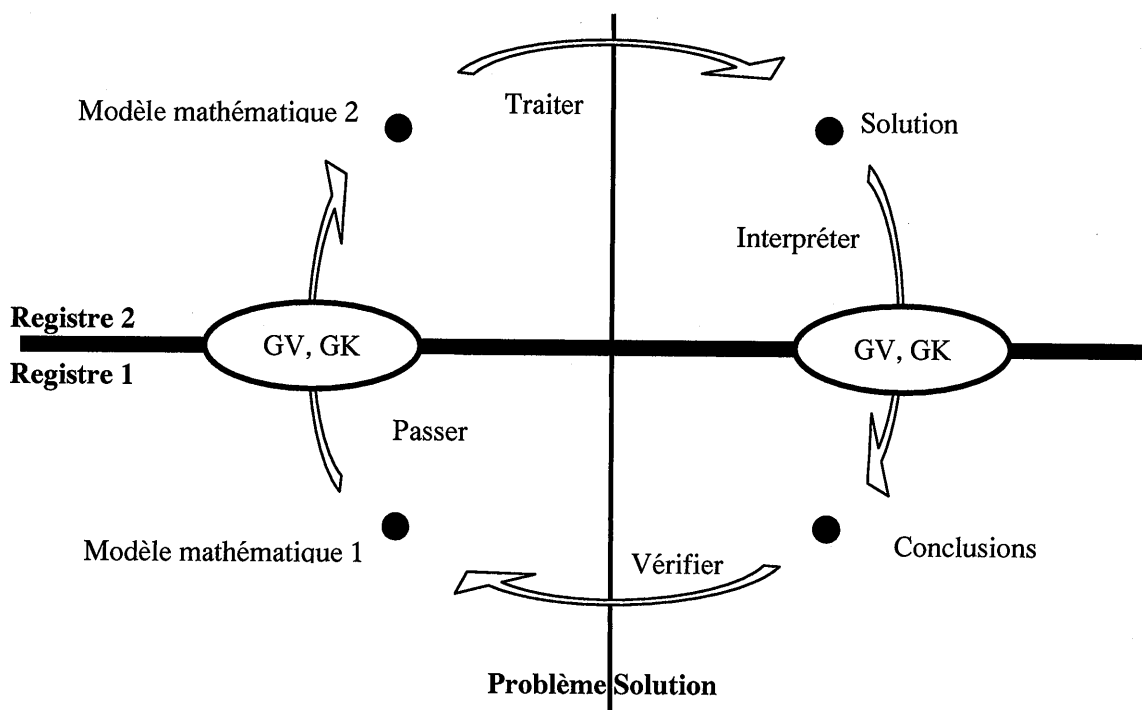
Le concept image et le concept definition s'avèrent être très utile lors des analyses des interviews. Quand ils résolvent des problèmes les élèves évoquent souvent des images et des propriétés qu'ils associent avec les fonctions. On peut déjà essayer d'identifier des restrictions possibles des concepts images lors des analyses des livres de classe. Plus tard ces restrictions peuvent être documentées par exemple avec des extraits d'interviews menés avec les élèves.

Il est important de mentionner qu'Anna Sierpiska choisit une approche différente qui permet d'utiliser l'analyse historique du développement des fonctions en y repérant les obstacles épistémologiques. (Sierpiska, 1992). Ces obstacles qu'elle repère peuvent aider à cerner plus facilement les difficultés actuelles des élèves.

### **3.2 Les représentations et les passages entre elles**

La première partie du cadre théorique et la définition de la pensée fonctionnelle montrent clairement l'importance qui est donnée dans ce travail aux représentations dans différents registres et aux passages entre ceux-ci.

Le schéma suivant présente un cercle de modélisation comme on en trouve en grand nombre dans les articles de recherche sur la modélisation (Lesh et al, 1987, p. 36; Blum, 2002; vom Hofe et al., 2004) (GV sont les Grundvorstellungen et GK les Grundkenntnisse) :



**Figure 3: Cercle de modélisation**

Ce cercle s'utilise lors de la résolution d'un problème donné dans un registre, pour la solution duquel il faut faire des analyses dans un autre registre.

Si le problème est donné dans le registre 1, il faut tout d'abord passer avec l'aide des Grundvorstellungen et des Grundkenntnisse dans le registre deux et y reformuler un second modèle mathématique du problème de départ. Le problème peut ensuite être traité à l'intérieur du second registre et une solution peut être trouvée. Cette solution doit ensuite être interprétée dans le registre de départ et il faut vérifier si la solution obtenue correspond aux exigences du problème initial.

Le cercle de modélisation ne doit pas être utilisé comme un modèle rigide, mais être ajusté aux problèmes étudiés. Un second tour du cercle entier peut s'avérer utile si la solution trouvée ne correspond pas aux besoins du problème. Ou bien seuls certains passages sont inversés et répétés, par exemple si le second modèle mathématique n'est pas adapté aux besoins.

Le cercle de modélisation permet de mieux comprendre le processus de résolution de problèmes quand il y a deux registres en jeu, ce qui va être utilisé lors des analyses des solutions des élèves.

Les représentations de fonctions dans les différents registres sont analysées en détail dans la suite de ce chapitre. Chaque représentation met l'accent sur une propriété différente, favorise une Grundvorstellung ou un concept de fonctions et a certains désavantages, qui peuvent créer des difficultés. Le tableau suivant résume les résultats :

	Formule	Graphique	Tableau	Langage
Nature de la variation	Implicite	Explicite	Explicite (si ordonné)	Possible
Règle de correspondance	Explicite	Implicite	Implicite	Possible
Display / Action – Notation (Kaput, 1989)	Action	Display	Display	Display
Grundvorstellungen dominantes (vom Hofe, 1995)	Association	Covariation, Object	Association, Covariation	Plutôt Association, Covariation
Action / Processus / Object (Dubinsky & Harel, 1992)	Action, Processus	Processus, Object	Processus	Plutôt Processus
Structural / Operational (Sfard, 1991)	Structural, Operational	Structural	Operational	Plutôt Operational
Limitations	Pas utilisable pour toutes les fonctions	Sont des approximations et incomplets	Seulement un choix de certaines paires d'origine/image	D'autres registres sont souvent utilisés en plus

**Tableau 2: Résumé des caractéristiques des représentations**

Mais il n'est pas suffisant de pouvoir traiter toutes les représentations de manière isolée. Les passages entre elles sont indispensables pour pouvoir développer une idée de ce qui reste invariant lors du passage entre deux registres et qui fait donc partie du concept de fonction lui-même. Thompson le formule de la manière suivante :

Put another way, the core concept of "function" is not *represented* by any of what are commonly called the multiple representations of function, but instead our making connections among representational activities produces a subjective sense of invariance. (Thompson, 1994, p. 23)

Claude Janvier représente cette connexion entre les représentations par un iceberg en forme d'étoile. Les différentes représentations, dont seulement une est visible à la fois, sont reliées par le concept lui-même (Janvier, 1983b, p. 24; Janvier, 1987b, p. 69).

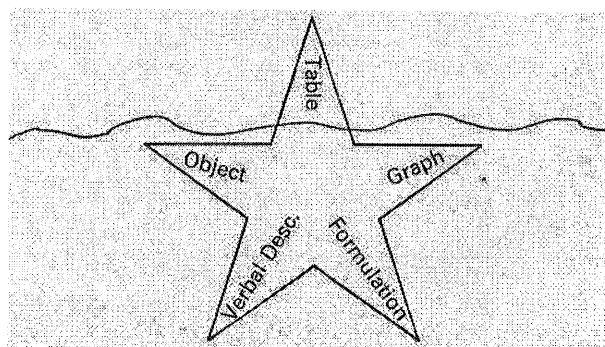


Figure 4: Le concept de fonction en forme d'iceberg

### 3.3 La définition de la notion de fonction

Les auteurs des livres de classe peuvent influencer l'image que les élèves ont des fonctions en en choisissant une définition plutôt qu'une autre. Et le moment auquel la définition est donnée peut également jouer un rôle important dans l'apprentissage des fonctions. Les points de vue de plusieurs auteurs à ce sujet sont discutés dans cette partie.

Il a été montré dans les analyses du développement historique de la notion de fonction, que l'aspect de covariation a été réduit peu à peu jusqu'à sa disparition complète dans la définition issue de la théorie des ensembles. L'aspect d'association est devenu dominant.

Beaucoup d'auteurs ont travaillé sur ces deux aspects en leur donnant des noms différents qui mettent l'accent sur certains points (par exemple Schwingendorf et al., 1992, p. 139 ; Selden & Selden, 1992, p. 2 ; Janvier, 1983b, p. 24). Comme dans la plupart des ouvrages de ces auteurs, ce travail défend la conviction que les deux aspects devraient apparaître lors de la définition de la notion de fonction et pas majoritairement celui de l'association, comme c'est le cas actuellement dans de nombreux pays.

La définition venant de la théorie des ensembles est critiquée par beaucoup d'auteurs pour un grand nombre de raisons. Elle ne semble pas adaptée pour être enseignée comme première définition et pas nécessaire pour les élèves dont il est question dans ce travail (voire par exemple : Janvier, 1983; Kaput, 1987; Kaput, 1989; Krüger, 2000; Malik, 1980; Markovits et al, 1986; Schmidt, 1990; Schwingendorf et al., 1992; Sierpiska, 1992). Une définition comme l'utilisait Euler est suffisante pour la plupart des problèmes posés dans les classes des niveaux étudiés. La définition abstraite peut être introduite après l'étude d'exceptions de cette définition simple (voire par exemple : Vinner & Dreyfus, 1989, p. 365; Malik, 1980, p. 492; Lengnink, 2002, p. 305).

Claude Janvier commente ce sujet en donnant la fonction suivante et en la commentant:



Il semble bien qu'on ait quelque part oublié l'essentiel ! (Janvier, 1983b, p. 28)

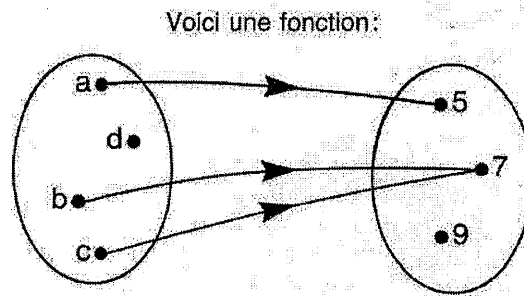


Figure 5: Une fonction

Ce travail défend la conviction que la première approche de la définition de la notion de fonction ne doit pas être en même temps le premier contact avec les relations fonctionnelles. Il est préférable de travailler un certain temps sans définition précise pour que les élèves aient la possibilité de former leur propre concept image. Le concept de pensée fonctionnelle a été sciemment défini de telle façon qu'il ne parle pas de fonctions mais de relations fonctionnelles.

Les analyses des chapitres suivants vont montrer quelles définitions ont été choisies en France et en Allemagne et si ces choix ont des répercussions sur les performances des élèves.

## 4 Recherches sur l'apprentissage des fonctions

Ce chapitre donne un aperçu des nombreuses études existantes sur la compréhension de fonctions. Cette classification va pouvoir être utilisée pour identifier les difficultés et ainsi les repérer plus facilement lors des analyses.

La première partie de ce chapitre décrit certaines parties importantes des concepts images qu'ont les élèves, qui ont été trouvés dans de nombreux travaux de recherche à ce sujet. Cela englobe aussi les concepts de fonctions comme action, processus et objet. De plus certains concepts définitions des élèves sont thématiques.

La seconde partie de ce chapitre donne un aperçu général des capacités qu'ont les élèves de passer d'une représentation dans un registre à une représentation dans un autre registre.

Des articles de recherche sur les obstacles de recherche sont finalement présentés ainsi que des propositions d'autres auteurs, qui ont pour but d'améliorer l'enseignement des fonctions.

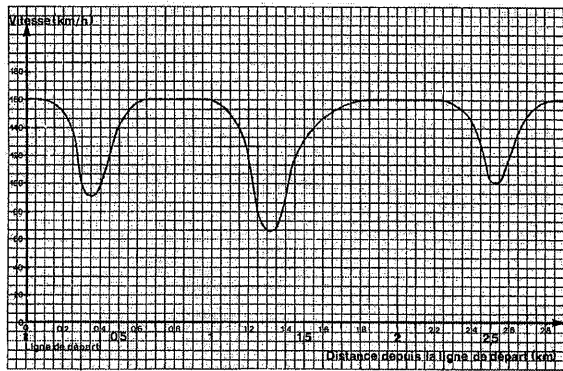
La liste suivante récapitule de manière très abrégée les difficultés que les élèves peuvent rencontrer en travaillant sur les fonctions :

### - Parties problématiques des concepts images

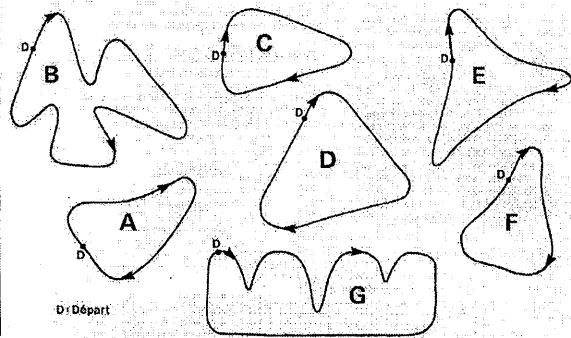
- Les fonctions doivent être données par une seule règle.  
Les fonctions données avec deux règles différentes sur deux intervalles ne sont pas acceptées tout comme les fonctions comportant des exceptions sur certains points isolés. (Markovits et al., 1986; Vinner, 1983)
- La courbe d'une fonction doit être « raisonnable ».  
Par exemple sans angles ni trous. Les fonctions affines occupent une place de référence dominante. (Dreyfus & Eisenberg, 1983; Even, 1993; Markovits et al., 1986; Sierpiska, 1992; Tall & Bakar, 1991; Vinner, 1983)
- Pour chaque  $y$  du domaine de valeurs, il y a exactement un  $x$  du domaine de définition. Il s'agit donc d'un changement du sens de l'unicité. (Vinner, 1983)
- Des propriétés qui n'ont rien à voir avec les fonctions sont associées à ce concept. Par exemple : « Les mathématiciens acceptent une certaine relation en tant que fonction en lui donnant un signe spécial, donc c'est une fonction ». (Vinner, 1983)
- Les concepts de pré fonctions et d'actions sont majoritaires chez les élèves. Le concept de processus se trouve bien moins souvent. (Breidenbach et al., 1992; Schwingendorf et al., 1992)
- La vision « point par point » (pointwise) des fonctions se manifeste plus souvent que la vision « à travers le temps » (across time ou global).  
Cette distinction est étroitement liée à la distinction entre association et covariation. On entend par la vision « point par point » un travail avec des paires de nombres comme il est souvent fait lors du travail avec les tableaux ou bien quand on considère certains points isolés des courbes. On parle d'une vision « à travers le temps » dès que plusieurs paires de nombres sont étudiées en même temps, par exemple pour

déterminer la nature de la variation. (Even, 1998, S. 109; Monk, 1988, p. 1; Coppé et al., 2006, p. 49)

- Concepts définitions problématiques (Vinner, 1983; Vinner & Dreyfus, 1989)
  - o Fonctions en tant que règle  
Les correspondances sans règle fixe ne sont pas acceptées.
  - o Fonctions en tant que formule  
Une fonction doit avoir une représentation dans le registre algébrique. Elle peut même être confondue avec cette représentation.
  - o Fonctions en tant que courbe  
Une fonction doit avoir une représentation dans le registre graphique
  - o Fonctions en tant que relation de dépendance mutuelle  
Deux variables dépendent l'une de l'autre.
- Le phénomène de compartmentalization peut être trouvé chez beaucoup d'élèves.  
On entend par *compartmentalization* le phénomène qui conduit un élève à défendre, sans s'en rendre compte, deux connaissances qui se contredisent. La compartmentalization peut se manifester entre autres quand il y a contradiction entre le concept image et le concept définition. L'élève répond aux questions concernant la définition en utilisant son concept définition et se réfère à son concept image lors de la résolution de problèmes concernant des fonctions. (Tall & Bakar, 1991; Vinner, 1983; Vinner & Dreyfus, 1989)
- Les domaines de définitions et de valeurs sont souvent négligés ou posent des problèmes.  
Quand les élèves donnent une définition de la notion de fonction, ils omettent souvent de parler du domaine de définition. Des questionnaires qui traitent du domaine de définition et du domaine de valeurs montrent que ces notions restent très floues et sont mal utilisées. (Furinghetti & Somaglia, 1994; Sfard, 1989)
- Les passages entre les différentes représentations des fonctions sont très difficiles pour une grande partie des élèves  
Différents résultats de recherche montrent que tous les passages posent des problèmes. Le type de difficulté dépend naturellement aussi des registres entre lesquels le passage doit s'effectuer. (Duval, 1988; Kalchman & Case, 1998; Markovits et al., 1986)
- Les représentations graphiques sont vues de manière iconique (iconic view).  
Une fonction est perçue de manière iconique quand la forme de la courbe est associée à l'aspect visuel de la situation réelle. (Dugdale, 1993; Monk, 1988)  
L'exemple le plus connu vient certainement de Claude Janvier qui montre à ses élèves une courbe représentant la vitesse d'une voiture de course en dépendance du chemin parcouru. Certains élèves pensent que le circuit a neuf tournants parce qu'ils comptent les « tournants » de la représentation graphique.  
Quand les élèves doivent relier un des sept circuits proposés à la courbe de vitesse, le circuit G est souvent choisi à cause de sa ressemblance avec la courbe de vitesse. (Janvier, 1983b, p. 26, 27)



**Figure 6: Vitesse de la voiture de course à chaque endroit du circuit (second tour)**



**Choix de circuits**

Des problèmes avec la représentation graphique venant d'une vision iconique sont signalés dans plusieurs articles de recherche.

- Les fonctions dépendant du temps créent un obstacle épistémologique

Les fonctions dépendant directement ou indirectement du temps sont très majoritaires dans l'enseignement scolaire. Cela mène certains élèves à identifier, spécialement lors du travail avec le registre graphique, un changement dans une variable dépendant du temps, même s'il n'y en a pas. (Janvier, 1998; Sierpinska, 1992)

D'autres obstacles épistémologiques, comme la domination des fonctions affines, sont également identifiés.

Plusieurs études citées dans ce chapitre sont réalisées avec des personnes bien plus âgées que la tranche d'âge prise en compte dans ce travail. Mais les problèmes relevés facilitent le travail d'analyse des chapitres suivants en aidant à les identifier. De plus, on peut rechercher dans les programmes et les livres de classe s'il est possible de trouver des raisons pour les difficultés constatées plus tard.

Les propositions d'amélioration de l'enseignement des fonctions sont présentées en trois groupes :

Le premier groupe se centre sur le travail sur les situations issues de la vie quotidienne. (Plusieurs auteurs exposent des possibilités pour fortifier la connexion entre l'enseignement des fonctions et les situations réelles)

Le second groupe veut changer l'orientation générale de l'enseignement des fonctions (par exemple utiliser de manière renforcée tous les registres et les passages entre ceux-ci, réduire le poids et le temps passé sur les fonctions affines, ou assurer l'utilisation de la Grundvorstellung d'association et de la Grundvorstellung de covariation par (pour) le choix des types de relations fonctionnelles étudiés)

Le troisième groupe montre comment l'utilisation des ordinateurs peut changer l'enseignement des fonctions. Ce point est traité de manière très raccourcie, puisque ce domaine de la recherche change très rapidement avec le progrès technologique et est devenu un domaine de recherche indépendant. Le développement d'un très grand nombre de programmes dans les dernières décennies a permis d'avoir des logiciels qui peuvent être employés de manière très diverse.



## 5 Questions de recherche et méthodologie

Les questions de recherche peuvent être formulées de manière précise à la suite de la définition de la pensée fonctionnelle et de la fixation du cadre théorique.

### 5.1 Questions de recherche

Le domaine de recherche du présent travail est le développement de la pensée fonctionnelle des élèves du CM2 à la 2<sup>de</sup> en France et en Allemagne (à l'exemple de la Bavière).

D'autres études montrent que les élèves ne développent qu'une pensée fonctionnelle très restreinte avant le CM2 (Ricco, 1982). En Allemagne beaucoup d'élèves finissent leur carrière scolaire au plus tard après la 10. classe (2<sup>de</sup>). Dans la branche la plus élevée du système scolaire allemand les élèves continuent à être scolarisés et ils commencent à étudier des types de fonctions plus complexes tout comme les élèves français à partir de la 2<sup>de</sup>. Ces moments clefs dans l'étude de situations fonctionnelles ont motivé le choix de la période scolaire analysée dans ce travail.

Les questions de recherche sont divisées en deux groupes.

Tout d'abord les questions concernant les programmes et les livres de classe, donc ce que les élèves devraient apprendre dans le domaine de la pensée fonctionnelle entre le CM2 et la 2<sup>de</sup>. Ensuite les questions qui s'intéressent aux performances des élèves des deux pays, c'est-à-dire aux capacités de mise en pratique de la pensée fonctionnelle quand il s'agit de résoudre des problèmes.

#### Questions concernant la comparaison des programmes et des livres de classe

De quelle manière les curricula souhaité et potentiel soutiennent et aident le développement de la pensée fonctionnelle en France et en Allemagne ?

Cette question générale peut être précisée par plusieurs questions en utilisant le travail théorique fait dans le troisième chapitre. Il est ainsi possible de tenir compte de toutes les facettes de la pensée fonctionnelle.

- Questions concernant les premiers travaux consacrés à la pensée fonctionnelle :  
Y a-t-il des travaux qui préparent au traitement des situations fonctionnelles ?  
Est-ce qu'on peut y discerner des préférences pour certains registres de représentations sémiotiques utilisés lors du travail avec les situations fonctionnelles ?  
Quels passages entre différents registres sont utilisés ?
- Questions sur les contenus concernant la pensée fonctionnelle :  
Y a-t-il des préférences concernant certains types de fonctions et l'ordre de leur introduction dans les deux pays ?
- Questions concernant les registres de représentations utilisés :  
Est-ce qu'il y a des préférences dans les problèmes posés concernant les différents registres ?  
Quels passages entre les différents registres sont utilisés lors du traitement des problèmes ?

- Questions sur les Grundvorstellungen :  
Est-ce que la formation de Grundvorstellungen est encouragée ?

Les problèmes identifiés dans d'autres recherches (voire chapitre 4) permettent de poser des questions concernant les difficultés attendues :

- Est-ce que les élèves peuvent se former un concept image de fonction consistant et mathématiquement correct ?  
Quelles restrictions concernant la largeur du concept image devront être attendues ?
- Peut-on identifier des mesures qui doivent prévenir des difficultés connues ?

### **Questions concernant les analyses comparatives des performances des élèves des deux pays**

Dans quelle mesure les élèves français et allemands développent-ils la pensée fonctionnelle et sont-ils capables de l'appliquer ?

La réponse à cette question générale se basera essentiellement sur les analyses de la sous-échelle *variations et relations* de PISA 2003, ainsi que sur des analyses détaillées de l'étude PALMA et une série d'interview menées dans les deux pays. Elle peut aussi être divisée en une série de questions

- Quelles conclusions peut-on tirer des résultats des élèves dans la sous-échelle *variations et relations* de PISA 2003 en analysant les résultats du point de vue de la pensée fonctionnelle ?
- Est-ce que les difficultés repérées peuvent être ramenées à des déficits de Grundvorstellungen, à des concepts images problématiques, à des difficultés de passages entre les différents registres ou à d'autres concepts décrits dans le troisième chapitre ?
- Peut-on montrer les progrès des élèves bavarois concernant le développement de la pensée fonctionnelle avec l'aide de PALMA ?
- Peut-on trouver dans les interviews menées dans le cadre de PALMA en France et en Allemagne des exemples significatifs des difficultés repérées auparavant et ainsi les analyser plus finement ?
- Peut-on ramener les points forts et les points faibles des élèves aux choix faits dans les programmes et les livres de classe ?  
Y a-t-il des points faibles qui apparaissent même si les approches des deux pays sont différentes ?

Il s'agit d'abord de connaître les performances des élèves, pour ensuite essayer de les expliquer par les résultats de la première question en utilisant le travail théorique fait dans le troisième chapitre.

## **5.2 Méthodologie**

Le curriculum d'un pays peut être analysé à quatre niveaux. On entend par *curriculum souhaité*, le curriculum que les instances officielles décident et qui peut être retrouvé dans les

programmes et leurs commentaires. Le *curriculum potentiel* est le lien entre le curriculum souhaité et le curriculum en pratique et peut être analysé à l'aide des manuels. Le curriculum traité concrètement dans les classes est appelé *curriculum dispensé* et peut être analysé en observant des classes ou en interviewant des professeurs. Finalement le *curriculum atteint* se traduit par les performances des élèves. (Baumert et al., 2000; Schmidt et al., 1996)

Le curriculum de chaque pays va être considéré à trois niveaux pour répondre aux questions posées : au niveau du curriculum souhaité, du curriculum potentiel et d'une partie du curriculum atteint. Une analyse du curriculum dispensé n'a pu être retenue, car une analyse précise de celui-ci serait allée bien au delà de ce qui est possible dans le cadre d'une thèse. L'analyse du curriculum potentiel peut cependant donner un bon aperçu des contenus traités dans les salles de classe, car les manuels utilisés ont une grande influence sur l'enseignement.

Le premier groupe de questions posées plus haut se réfère aux curricula souhaité et potentiel. En Allemagne ces analyses vont se concentrer sur l'Etat fédéral de Bavière. Les programmes de la 5. à la 10. classe ainsi que les Bildungsstandards (des recommandations valables pour toutes l'Allemagne) seront étudiés pour les trois filières existantes. En France les programmes des classes CM2 à 2<sup>de</sup> seront analysés.

Le curriculum potentiel sera analysé à l'aide d'un livre de classe pour chaque année et chaque filière du système scolaire bavarois et de deux livres de classe par année en France. Il s'agit dans tout les cas de livres utilisés dans un grand nombre de classes.

Le second groupe de questions se réfère au curriculum atteint. Les performances des élèves français et allemands dans PISA 2003 et celle des élèves bavarois dans PALMA seront étudiées pour essayer de les comparer et de retracer le développement de la pensée fonctionnelle. Il ne sera pas seulement question des résultats globaux, mais aussi d'analyse de fonctionnement différentiel d'items pour détecter des points forts et des points faibles des élèves.

Les performances des élèves peuvent aussi être analysées grâce à des interviews réalisées dans les deux pays. Cela sera fait dans le neuvième chapitre, où des points forts et des points faibles identifiés auparavant seront illustrés par des extraits d'interviews.







Gymnasium, celle du milieu Realschule et la plus basse Hauptschule. Cette séparation très rapide est considérée comme une des raisons de la grande étendue des performances des élèves allemands dans PISA 2003.

Voici le niveau scolaire des élèves de quinze ans donné dans PISA 2003 (OECD, 2005b):

Classe	7 (5 <sup>e</sup> )	8 (4 <sup>e</sup> )	9 (3 <sup>e</sup> )	10 (2 <sup>de</sup> )	11 (1 <sup>e</sup> )
Partie des élèves allemands	1,7%	15%	60%	23,3%	0,1%
Partie des élèves français	0,2%	5,4%	34,9%	57,3%	2,2%

Une des raisons pour le retard des élèves allemands est certainement l'âge de scolarisation, qui est en moyenne un peu plus précoce en France qu'en Allemagne (en Allemagne il dépend de l'Etat fédéral).

Les comparaisons entre la France et l'Allemagne doivent donc tenir compte du fait que les élèves français sont allés en moyenne un peu plus de temps à l'école que les élèves allemands.

De plus il est nécessaire d'analyser les programmes et les livres de classe des trois types d'écoles bavaroises. Il faut également toujours se référer au type d'établissement scolaire lors des analyses des performances des élèves.

En France les programmes des années 1995, 1997, 1998, 2001 et 2002 seront analysés (Programme France école primaire, 1995; Programme France 6<sup>e</sup> à 2<sup>de</sup>, 1995-2001). En Bavière les programmes de 1997 pour la Hauptschule (Lehrplan Bayern Hauptschule Klasse 5 bis 10, 1997), ceux de 2000 à 2003 pour la Realschule (Lehrplan Bayern Realschule Klasse 5 bis 10, 2000-2003) et ceux de 1989 pour le Gymnasium (Lehrplan Bayern Gymnasium G9, 1989) seront étudiés (d'autres programmes seront également étudiés pour pouvoir détecter des tendances et changements majeurs).

## 6.2 Les programmes bavarois

Les programmes bavarois analysés dans ce travail se situent dans le contexte historique d'éloignement de la théorie des ensembles pour aller vers une utilisation plus importante de problèmes parvenant de la vie quotidienne. (Voire partie 6.2.2)

L'ordre d'introduction des contenus ne change pas dans les différents types d'établissements scolaires. La notion de fonction est introduite avec les fonctions affines après que les élèves ont travaillé un certain temps avec la proportionnalité et la proportionnalité inverse ( $f(x)=1/x$ ). Ensuite s'ajoutent les fonctions carrées et les fonctions racines carrées et puis, à la fin de la période analysée, les fonctions puissances, exponentielles, logarithmes et les fonctions trigonométriques. Mais le temps d'introduction des fonctions varie fortement et il faut tenir compte du fait que les élèves de la Hauptschule, qui quittent l'école après la neuvième classe (3<sup>e</sup>), ne voient même pas les fonctions affines (cela change avec les nouveaux programmes). A la fin de leur scolarité en dixième (2<sup>de</sup>), les élèves de la Realschule n'ont pas non plus rencontré toutes les fonctions citées plus haut.

La définition de la notion de fonction est seulement étudiée par les élèves de la Hauptschule qui veulent continuer leur formation scolaire après la neuvième. Les fonctions y sont introduites en tant qu'association tout comme au Gymnasium. Par contre, à la Realschule, la

définition par les relations continue à être enseignée comme à l'époque des mathématiques modernes.

L'utilisation des registres de représentation dépend également du type d'établissement scolaire. Le rôle des applications est toujours grand, bien qu'il diminue dans les dernières classes de la Realschule. Les programmes mentionnent l'utilisation de tous les registres usuels, mis à part le registre des tableaux qui n'apparaît pas dans les programmes du Gymnasium. Le registre algébrique paraît jouer un rôle très important partout, rejoint par le registre graphique à la Realschule et au Gymnasium. La plupart des passages entre les registres mathématiques s'effectuent entre eux deux, bien que l'importance de tous les passages soit soulignée dans tous les programmes.

En ce qui concerne les Grundvorstellungen on peut voir que la Grundvorstellung association paraît être nettement plus souvent utilisée que la Grundvorstellung de covariation qui se renforce seulement dans les dernières classes de la Realschule et du Gymnasium.

Il est possible que le franchissement de l'obstacle épistémologique de la fixation linéaire puisse être facilité en étudiant les fonctions de proportionnalité inverse avant de définir les fonctions. Mais l'étude assez longue de fonctions affine au Gymnasium risque de restreindre le concept image des élèves.

### 6.3 Les programmes français

Les programmes français se situent dans un contexte historique dans lequel il n'y pas eu de grands changements en ce qui concerne l'ordre d'introduction des différents types de fonctions depuis 1977. En France il est de tradition dans les programmes d'étudier les variations et d'introduire relativement tard des relations non linéaires. L'approche par les ensembles habituelle dans les années 70 a de nouveau complètement disparu des programmes.

Les programmes français du CM2 à la 2<sup>de</sup> prévoient que les élèves doivent connaître la définition des fonctions et certaines fonctions de référence à la fin de cette période. Ils doivent être capables de traiter des situations fonctionnelles provenant de différents domaines et d'utiliser les différents registres ainsi que les passages entre ceux-ci.

Il est possible de retrouver des traces de la Grundvorstellung d'association et de celle de covariation dans les programmes. La Grundvorstellung de covariation paraît cependant être plus fortement utilisée, bien que les fonctions soient définies en tant que règle de correspondance en 2<sup>de</sup>. L'objet fonction n'est pas encore utilisé et on ne peut pas identifier de travaux menant à celui-ci, comme le fait de regrouper certaines fonctions en comparant certaines caractéristiques.

On remarque que le développement qui aboutit à la définition des fonctions dure explicitement trois, voire quatre ans, pendant lesquels les élèves voient seulement des fonctions linéaires et affines, et que toute définition est explicitement exclue. Certains exemples de relations non fonctionnelles sont donnés, mais on ne peut pas reconnaître une préparation à une notion de fonction qui unirait plusieurs relations fonctionnelles connues. L'utilisation de la Grundvorstellung de covariation s'intensifie après la définition des fonctions. Le nombre de fonctions connues reste par contre relativement faible. En 2<sup>de</sup> on voit apparaître les premières fonctions non linéaires avec  $x \mapsto x^2$  et  $x \mapsto \frac{1}{x}$ . Les livres de classe

pourront éclaircir dans quelle mesure ces fonctions sont utilisées avec des paramètres. Seules parmi les fonctions trigonométriques les fonctions sinus et cosinus sont étudiées, et les fonctions exponentielles et logarithmes manquent complètement.

Le long travail concernant les situations de proportionnalité et les fonctions affines, qui dure jusqu'en 2<sup>de</sup>, peut mener à une plus grande difficulté à franchir l'obstacle épistémologique de la fixation linéaire.

## 6.4 Comparaison des programmes

Les programmes allemands (en prenant l'exemple de la Bavière) et français ont été analysés dans ce chapitre. Plusieurs points communs s'en détachent rapidement, mais des analyses plus détaillées montrent aussi que les auteurs des programmes ont mis l'accent à différents endroits.

Les programmes des deux pays s'orientent d'après ce que les élèves doivent apprendre (input oriented curriculum). Ceux de France sont bien plus détaillés que ceux d'Allemagne. Ils contiennent plus de directives concernant le travail en classe et aussi des interdictions concernant certains contenus.

Les programmes courts bavarois laissent plus de liberté aux auteurs des livres de classe et aux professeurs, mais ces libertés peuvent s'avérer difficiles voire problématiques, s'il manque des précisions sur certains détails ou des possibilités de relier les contenus à d'autres matières. Les nombreux détails des programmes français peuvent, peut être, s'expliquer par le fait que, contrairement à l'usage allemand, les livres de classe ne doivent pas être autorisés par l'Etat avant de pouvoir être utilisés en classe. Les programmes sont donc une des dernières possibilités pour l'Etat français d'influencer le curriculum.

On peut identifier plusieurs similarités concernant le déroulement général du travail sur les fonctions. Les deux pays commencent tôt avec l'étude de la proportionnalité et tous les registres de représentations sont utilisés. La notion de fonction est introduite lors du travail sur les fonctions affines après plusieurs années passées sur la proportionnalité. Les élèves peuvent ensuite commencer à s'initier aux fonctions de référence en se penchant sur les fonctions carrées. Les deux pays accordent beaucoup d'importance au travail avec tous les registres de représentation et spécialement aux applications. La Grundvorstellung d'objet ne fait pas partie des programmes des deux pays.

Mais il existe plusieurs différences concernant le choix des contenus et de leur développement.

En France beaucoup de temps est passé exclusivement sur la proportionnalité et sur les fonctions affines, ces dernières arrivant en 3<sup>e</sup>. Les relations fonctionnelles non linéaires sont seulement étudiées en détail en 2<sup>de</sup>, après l'introduction générale de la notion de fonction. En Bavière, par contre, on commence relativement tôt à travailler sur les relations fonctionnelles non linéaires. Les relations de proportionnalité inverse sont introduites en même temps que la proportionnalité en 6<sup>e</sup> au Gymnasium et un an après la proportionnalité en 4<sup>e</sup> à la Hauptschule.

Si on regarde seulement les types de fonctions connus en 3<sup>e</sup> on constate que les élèves de la Hauptschule bavaroise n'ont pas étudié les fonctions affines, mais qu'ils connaissent les

relations de proportionnalité inverse, inconnues de leurs collègues français de cet âge. A ce moment-là, les élèves de la Realschule et du Gymnasium connaissent déjà la définition de la notion de fonction, et en partie les fonctions carrées et les fonctions racines carrées.

On peut également constater des différences à la fin de la période analysée. Les élèves qui sont encore dans une école bavaroise connaissent tous au moins des exemples de fonctions exponentielles et logarithmes. Une partie des élèves de la Realschule et ceux du Gymnasium les ont étudiées de façon plus précise et ont aussi travaillé sur les fonctions puissances, les fonctions inverses et les fonctions trigonométriques. Seules les fonctions sinus et cosinus ainsi que certains cas spéciaux des fonctions puissance sont prévus en France à ce niveau là.

On étudie donc bien moins de types de fonctions en France, où le programme prévoit une introduction plus tardive de moins de types de fonctions. Certains types de fonctions, comme les fonctions exponentielles, auxquelles on accorde de plus en plus d'importance en Allemagne, n'apparaissent pas.

Le programmes français par contre prévoient un travail intensif sur les variations et donc avec la Grundvorstellung de covariation. D'autre part le registre algébrique n'est introduit que très doucement et n'est pas tout de suite relié au concept de fonction.

L'analyse de futurs programmes montre que les contenus ne changent que très peu et que, par conséquent, les différences subsistent, malgré la coopération internationale croissante.

Prenant en considération ces résultats, on peut poser les questions suivantes :

Ne renforce-t-on pas la fixation linéaire en France en laissant travailler les élèves pendant plusieurs années exclusivement sur la proportionnalité ?

Ne peut-on pas étudier plus de types de fonctions en France, comme on le fait en Allemagne ?

La définition de la notion de fonction utilisée en France s'appuyant sur la Grundvorstellung d'association ne pose-t-elle pas de problèmes si on travaille après majoritairement avec la Grundvorstellung de covariation ?

Ces questions peuvent aussi être posées autrement :

Est-ce qu'en Allemagne on n'introduit pas trop tôt beaucoup de types de fonctions, alors que les élèves ne sont pas encore capables de les assimiler ?

Les élèves allemands n'ont-ils pas une Grundvorstellung de covariation sous développée étant donné qu'ils étudient bien moins les variations que leurs collègues français ?

Ce travail va tenter de répondre à ces questions

Le chapitre se termine avec une présentation des contenus étudiés dans les deux pays sous forme de tableau.

	Bavière – Hauptschule	Bavière – Realschule Wahlpflichtfächergruppe 1	Bavière – Realschule Wahlpflichtfächergruppe 2/3	Bavière – Gymnasium	France
Davor	- Représenter des chiffres arrondis par de colonnes				- Utiliser et réaliser des tableaux, des diagrammes et des graphiques
- Avant	- Extraire des informations de tableaux, d'images et de diagrammes				- Première approche de la <b>Proportionnalité</b> (pourcentages, échelles, changements d'unité simples)
5. – CM2	- Interpréter et réaliser des diagrammes - Equations simples - Échelles	- Mesurer des grandeurs dans des applications et les représenter - Règle de trois pour préparer la proportionnalité et les associations - Échelles	- Dans des problèmes d'application: Repérer et travailler sur des dépendances données verbalement - Échelles		
6. – 6 <sup>e</sup>	- Extraire des informations de tableaux et de diagrammes et les traiter mathématiquement - Construction d'expressions algébriques	- <b>Proportionnalité</b> dans des problèmes d'application - Facteur de proportionnalité - Utilisation de tableaux, diagrammes et ordinateurs - Pourcentages - Tableaux de valeurs numérique et graphique concernant des relations algébriques simples. domaine de définition	- <b>Proportionnalité</b> et <b>Proportionnalité inverse</b> ( $f(x)=1/x$ ) - Travail avec les graphiques - Passage venant de la représentation algébrique ou allant vers elle - Pourcentages et intérêts	- Proportionnalité - Exemples non proportionnels - Registres de représentation - Passage venant de la réalité ou allant vers elle - Utilisation de „en fonction de, est fonction de“ - PAS de définition de la notion de fonction	
7. – 5 <sup>e</sup>	- Étudier des associations, les représenter (tableaux, diagrammes, système de coordonnées cartésiennes) - <b>Associations proportionnelles</b> dans toutes ses représentations - Passage venant de l'expression algébrique ou allant vers elle - Pourcentages et applications	- Proportionnalité et <b>Proportionnalité inverse</b> - Travail avec la réalité et la représentation algébrique - Tableaux, diagrammes et graphiques pour représenter - Pourcentages et intérêts - Tableaux de valeurs numériques et graphiques pour des expressions algébriques	- Poser des expressions algébriques, les traiter et les interpréter - Résoudre des équations linéaires	- Approfondissement de la proportionnalité, facteur de proportionnalité - Travail avec les registres de représentation. Spécialment les tableaux. Pas de connexion entre la proportionnalité et la représentation algébrique - Passage venant des tableaux ou allant vers eux - PAS de définition de la notion de fonction	

8. – 4 <sup>e</sup>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Reconnaître des relations dans la vie courante</li> <li>- Proportionnalité et <b>associations de proportionnalité inverse</b></li> <li>- Lire, réaliser et interpréter des diagrammes</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Les <b>fonctions</b> en tant que relations</li> <li>- Travail avec tous les registres</li> <li>- Les <b>fonctions affines</b> se développent à partir de la proportionnalité</li> <li>- Droites parallèles aux axes</li> <li>- Relation inverse et <b>fonction inverse</b></li> <li>- <b>Fonctions de la proportionnalité inverse</b> avec asymptotes</li> <li>- Influence des paramètres des expressions algébriques respectives</li> <li>- Expressions algébriques: L'insertion d'une valeur dans une variable donne une valeur</li> <li>- Expressions quadratiques et extrema</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Expressions algébriques: L'insertion d'une valeur dans une variable donne une valeur</li> <li>- Expressions algébriques et extrema</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- <b>Fonctions</b> en tant que règle d'association</li> <li>- <b>Fonctions affines</b></li> <li>- Significations graphiques des coefficients</li> <li>- Fonctions affines par intervalles et fonction valeur absolue</li> <li>- Représentation algébrique en tant que représentation centrale</li> <li>- Résoudre un système de 2 équations linéaires à 2 inconnues graphiquement et algébriquement</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Proportionnalité: représentation graphique discrète</li> <li>- Contre-exemples</li> <li>- Passage venant de la réalité ou allant vers elle</li> <li>- Utilisation renforcée de la GV de covariation</li> <li>- PAS de définition de la notion de fonction</li> </ul>
9. – 3 <sup>e</sup>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Problèmes d'applications pour des relations proportionnelles et inversement proportionnelles. Tableaux, illustration</li> <li>- Dépendance fonctionnelle entre l'aire et la largeur d'un carré.</li> <li>- Pourcentages, intérêts et facteurs de croissance</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- <b>Fonctions carrées</b>, problèmes d'extrema, représentations algébriques des paraboles</li> <li>- <b>Fonctions racine carrée</b> en tant que fonctions inverse</li> <li>- Aires : relation fonctionnelle et extrema</li> <li>- GV de covariation avec les représentations graphiques</li> <li>- Résoudre un système de 2 équations linéaires à 2 inconnues graphiquement et algébriquement</li> <li>- Equations quadratiques</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Les <b>fonctions</b> en tant que relations</li> <li>- Travail avec tous les registres</li> <li>- Les <b>fonctions affines</b> se développent à partir de la proportionnalité</li> <li>- Droites parallèles aux axes</li> <li>- Aires : relation fonctionnelle et extrema</li> <li>- Résoudre un système de 2 équations linéaires à 2 inconnues graphiquement et algébriquement</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- <b>Fonctions carrées</b></li> <li>- Problèmes d'extrema</li> <li>- Passage entre la représentation algébrique et la représentation graphique</li> <li>- <b>Fonctions racine carrée</b> en tant que fonctions inverse</li> <li>- Equations quadratiques</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- <b>Notion de fonction dans des exemples</b> en tant qu'association, mais PAS de définition formelle</li> <li>- <b>Fonctions</b> linéaires et <b>affines</b>: <math>x \mapsto ax+b</math> avec <math>a</math> et <math>b</math> fixés</li> <li>- Sa représentation dans tous les registres et passages entre ceux-ci</li> <li>- Pas de représentation algébrique générale</li> <li>- Résoudre un système de 2 équations linéaires à 2 inconnues graphiquement et algébriquement</li> </ul>



<p>- La notion de fonction en tant qu'association</p> <p>- Fonctions affines dans toutes leurs représentations</p> <p>- Fonctions carrées dans toutes leurs représentations (travail sur expression algébrique)</p> <p>- Résoudre des systèmes d'équations linéaires et d'équations quadratiques graphiquement et algébriquement</p> <p>- Problèmes d'applications concernant la croissance à pourcentage fixe</p> <p>- Fonctions trigonométriques dans des triangles</p>	<p>- Fonctions puissances et leur réversibilité</p> <p>- Fonctions exponentielles et logarithmes</p> <p>- Travail avec leurs représentations graphiques</p> <p>- Passage entre les représentations algébriques et graphiques lors de variations de paramètres</p> <p>- Fonctions trigonométriques en géométrie avec leurs représentations graphiques</p>	<p>- Fonctions carrées, problèmes d'extrema, représentations algébriques des paraboles</p> <p>- Fonctions de la proportionnalité inverse avec asymptotes</p> <p>- Exemples de fonctions exponentielles, définition représentation graphique</p> <p>- Seulement les représentations graphiques des fonctions trigonométriques</p> <p>- Equations quadratiques</p>	<p>- Fonctions puissances et leur réversibilité</p> <p>- Classification en types : paraboles et hyperboles de degré <math>n</math></p> <p>- Fonctions exponentielles et logarithmes</p> <p>- Travail avec leurs représentations graphiques</p> <p>- Circonférence et aire d'un cercle</p> <p>- Formules pour calculer les volumes</p> <p>- Fonctions trigonométriques en géométrie avec leurs représentations graphiques</p> <p>- Fonctions <math>y = a \sin(bx + c)</math></p> <p>- Passage entre la représentation algébrique et la représentation graphique</p> <p>- GV de covariation lors d'analyses de valeurs limites</p>	<p>- Notion générale de fonction.</p> <p>- Fonctions à une variable réelle, exemples de fonctions discrètes et de fonctions à deux variables. Contre-exemples</p> <p>- Tous les registres de représentation, spécialement le registre graphique</p> <p>- Notation <math>f(x)</math> et <math>f</math> avec passage à l'objet</p> <p>- Tableaux de variations, Analyses des extrema soutiennent la GV de covariation</p> <p>- Fonctions de référence : <math>x \mapsto x^2</math>, <math>x \mapsto \frac{1}{x}</math>, <math>x \mapsto \sin x</math> et <math>x \mapsto \cos x</math>, avec leurs représentations graphiques et leurs variations</p> <p>- <math>x \mapsto \sqrt{x}</math>, <math>x \mapsto x^3</math></p> <p>- <math>x \mapsto  x </math> sont découverts dans des problèmes</p> <p>- Résoudre des équations graphiquement</p>
---	--	--	--	---

## 7 Analyse et comparaison du curriculum potentiel

Le chapitre précédent a pu répondre aux questions portant sur le développement général de l'enseignement des fonctions. Pour pouvoir faire des analyses plus précises de certains points fondamentaux de la pensée fonctionnelle, comme l'utilisation des différents registres et des Grundvorstellungen ou des concepts images que les élèves peuvent développer, il est indispensable de regarder certains livres de classe utilisés dans les deux pays. Il sera également possible de vérifier dans quelle mesure les choix des programmes sont repris par les auteurs des manuels.

Ce chapitre contient des analyses de deux séries de livres de classe pour la France (Pour le CM2 *Cap maths CM2* (Charnay, Combiér & Dussuc, 2004a-b) et *J'apprends les maths, manuel CM2* (Brissiaud, 2000a-b), pour le collège *Collection Triangle, Mathématiques 6<sup>e</sup>-3<sup>e</sup>* (Chapiron, Mante, Mulet-Marquis & Pérotin, 2001-2005) et *Collection Cinq sur Cinq, Maths 6<sup>e</sup>-3<sup>e</sup>* (Delord & Vinrich, 2000-2003), et pour la 2<sup>de</sup> *Décllic 2<sup>de</sup> Mathématiques* (Misset, Turner & Lotz, 2004) et *Transmath 2<sup>de</sup>* (Antibi, Barra, & Morin, 2004)) et d'une série par type d'école en Bavière. (Pour la Hauptschule *Mathe aktiv 5-9 für bayerische Hauptschulen* (Rinkens & Wynands, 1997-2001) et *Formel 10* (Vogel, Vollrath & Haubner, 2002), pour la Realschule *Mathematik für Realschulen. 5.-10. Jahrgangsstufe* (Habler et al., 1994-2002) et pour le Gymnasium *Mathematik 5-10 Algebra/Geometrie* (Rieck, 1994; Kunesch & Rieck, 1995; Feuerlein, Titze & Walter, 1992a-d; Kratz, 1993a-c; Kratz, Schweiger & Wörle, 1994))

### 7.1 Les livres de classe bavarois

Les manuels scolaires bavarois restent très proches des programmes. La suite des chapitres des livres reflète la suite des sous parties des programmes. Tous les manuels regroupent les contenus en différents chapitres autour des différents concepts mathématiques. Il n'y a pas de division par heure de classe ou de structure des contenus en forme de spirale.

Plus le niveau du type d'école est élevé, plus il y a d'explications et d'exemples. Un élève du Gymnasium a donc la possibilité d'apprendre et de comprendre seul les contenus, alors qu'un élève de la Hauptschule ne pourra pas le faire.

Aucun livre allemand analysé pour ce travail ne contenait des indications pour les élèves sur la manière de l'utiliser, ou des explications pour les professeurs sur le choix et le développement des contenus.

La suite des différents types de fonctions ne change pas d'un type d'école à un autre. Les fonctions linéaires, les fonctions liées à la proportionnalité inverse et les fonctions affines sont introduites dans la Hauptschule. Les élèves qui veulent poursuivre leur parcours scolaire voient en plus les fonctions carrées et exponentielles. Ceux qui vont à la Realschule étudient de surcroît les fonctions racine carrée et, selon la branche choisie à la Realschule, les fonctions puissances, exponentielles et logarithmes. Seuls les élèves du Gymnasium travaillent en détail sur les fonctions trigonométriques.

Il s'agit donc toujours de la même suite de contenus et plus le niveau d'école est élevé, plus les types de fonctions sont variés.

Les fonctions sont définies dans la dixième classe (2<sup>de</sup>) de la Hauptschule, à un moment où la plupart des élèves ont déjà quitté cette école. De plus on peut s'attendre à une confusion entre la représentation dans le registre algébrique et la notion de fonction. La représentation apparaît en même temps que la première utilisation du mot fonction. A cela s'ajoute que les fonctions ne sont jamais définies.

A la Realschule les fonctions sont définies en tant que relations spéciales. Ici aussi on peut s'attendre à des difficultés, car cette définition n'est plus jamais utilisée, sauf lors de l'introduction des fonctions inverses. Le vocabulaire venant de la théorie des ensembles est, par contre, utilisé souvent, par exemple en insistant sur le domaine de définition. Plus tard les fonctions sont définies en utilisant leurs représentations algébriques, ce qui peut ici aussi entraîner une confusion entre la représentation et la notion.

Les fonctions sont définies au Gymnasium avant tout travail sur des fonctions concrètes. Elles sont d'abord montrées comme des *boîtes noires* et puis définies en tant qu'association unique. Lors de la définition, plusieurs types de fonctions différentes sont présentés et tous les registres de représentation sont utilisés. Les auteurs veulent apparemment éviter tout concept image trop restreint et toute confusion entre l'objet et sa représentation. Mais toutes les fonctions montrées sont des relations entre des nombres, et l'écriture choisie pour noter les fonctions elles-mêmes ainsi que pour les différencier de leurs représentations ressemble fort à l'écriture algébrique ( $x \mapsto f(x)$ ).

Les élèves qui sont dans la dixième classe de la Hauptschule (2<sup>de</sup>) peuvent faire connaissance de la notion de fonction en tant que notion réunissant toutes les associations qu'ils connaissent déjà, bien que la notion n'y soit jamais clairement définie. Mais on peut quand même remarquer que la notion de fonction ne peut pas être construite par les élèves bavarois eux-mêmes comme notion unissant des associations qu'ils connaissent déjà. Elle est définie avant et les élèves doivent y associer les fonctions qu'ils apprennent après. Cela peut mener à des problèmes entre le concept image et le concept définition.

Il est aussi important de noter que les élèves de toutes les écoles étudient seulement, mises à part quelques exceptions, des fonctions continues qui sont définies par une seule formule sur tout leur domaine de définition.

Tous les registres de représentation sont utilisés dans les trois différentes écoles. Le registre graphique n'est utilisé qu'à partir de la septième classe (5<sup>e</sup>) à la Hauptschule et le registre algébrique n'y est pas utilisé pour représenter de manière générale les fonctions jusqu'à la dixième classe (2<sup>de</sup>).

Les représentations algébriques et graphiques sont très utilisées dans la Realschule et le Gymnasium, tout comme le passage entre elles. Le registre des tableaux est la plupart du temps un registre de soutien pour faciliter certains passages. Les applications se concentrent à la Hauptschule et au Gymnasium, tandis que leur importance diminue beaucoup dans les classes élevées de la Realschule.

Un bilan partagé peut être tiré concernant l'utilisation des Grundvorstellungen. La Realschule utilise beaucoup la Grundvorstellung d'association lors de la définition des fonctions par la théorie des ensembles. La Grundvorstellung de covariation y est utilisée bien moins souvent. A la Realschule et au Gymnasium certains nouveaux types de fonctions sont introduits en déplaçant dans le système de coordonnées cartésiennes la représentation graphique d'une

fonction connue. Dans ce cas-là les élèves travaillent là plutôt avec l'objet *courbe*, bien qu'il s'agisse au fond du déplacement de l'objet *fonction*. On ne peut donc pas parler de Grundvorstellung d'objet. Celle-ci peut par contre être utilisée lorsque différents types de fonctions sont regroupés en classes, ce qui est aussi fait. A part cela, il n'y a pas d'utilisation importante de la Grundvorstellung d'objet dans les écoles bavaroises aux niveaux analysés dans ce travail.

Étant donné le nombre limité de fonctions qu'ils voient, on peut s'attendre chez les élèves de la Hauptschule à un concept image restreint et contenant plusieurs idées fausses. Cela vaut aussi pour une partie des élèves de la Realschule. Seuls certains élèves d'une branche mathématique de la Realschule et ceux du Gymnasium ont une bonne base pour développer la pensée fonctionnelle.

Les élèves bavarois peuvent donc développer une compréhension très différente des fonctions qui dépend aussi du type d'école à laquelle ils vont. Certains ne connaissent pas du tout de définition de la notion de fonction, d'autres ont une définition venant de la théorie des ensembles et les derniers une définition en tant qu'association. De plus, ces derniers connaissent un nombre très différent de types de fonctions. Il existe donc des différences fondamentales, et dans certains cas, des lacunes importantes.

## 7.2 Les livres de classe français

Les manuels scolaires français analysés ici se divisent en trois parties. Tout d'abord les livres de l'école primaire, ensuite ceux du collège et finalement ceux du lycée.

Les livres du CM2 sont très différents des autres. Ils sont partagés en séances et non en chapitres et ils ne contiennent pas d'explications.

Les livres du collège et du lycée se ressemblent dans leur manière de présenter les contenus. Après une partie de cours comportant des problèmes résolus de manière exemplaire, les problèmes deviennent de plus en plus complexes et se réfèrent souvent aux problèmes résolus. De plus, les solutions de certains problèmes sont données à la fin du livre, ce qui permet un travail autonome des élèves.

Tous les manuels contiennent des explications concernant leur structure et leur utilisation ainsi qu'une référence aux programmes.

Les manuels scolaires confirment les résultats de l'analyse des programmes. En France le travail sur les proportionnalités et les fonctions affines s'étire sur plusieurs années. La proportionnalité est vue à partir du CM2 et continue à être étudiée jusqu'en 3<sup>e</sup>, où les fonctions affines viennent s'y ajouter. Les élèves doivent identifier les situations de proportionnalité et celles qui ne le sont pas. Une fois la situation identifiée, ils continuent à travailler seulement sur les situations de proportionnalité. Le contraste proportionnalité-non-proportionnalité ne se reflète donc pas dans les problèmes que les élèves étudient de manière précise.

Ce n'est qu'en 2<sup>de</sup> que des dépendances non linéaires sont analysées avec les fonctions carrées, les fonctions de la proportionnalité inverse et les fonctions cosinus et sinus. Ces dernières sont aussi vues avant, mais seulement dans le cadre de la géométrie et sans en utiliser l'aspect fonctionnel.

Dans les deux livres analysés, les problèmes proposés après la définition de la notion de fonction contiennent des fonctions définies par leur représentation graphique et dont la représentation algébrique est inconnue des élèves.

En 3<sup>e</sup> on voit apparaître pour la première fois le mot *fonction* dans un des livres, et cela en même temps que l'introduction de l'écriture algébrique, ce qui peut mener à un mélange entre la notion mathématique et sa représentation. Ce n'est qu'en 2<sup>de</sup> qu'on trouve des explications claires de la notion de fonction; elle est définie en tant qu'association entre des nombres réels. C'est à ce moment-là qu'il est aussi question pour la première fois de domaine de définition, car les fonctions sont définies sur des intervalles de nombres réels.

Au début ce sont essentiellement le registre graphique et le registre des tableaux qui sont utilisés pour représenter des dépendances fonctionnelles. Le registre algébrique est développé en parallèle à l'étude de la proportionnalité. Mais ce n'est qu'en 4<sup>e</sup> voire en 3<sup>e</sup> qu'il est utilisé pour représenter des dépendances fonctionnelles.

En 3<sup>e</sup>, les élèves peuvent travailler avec des fonctions linéaires et affines dans toutes leurs représentations et réaliser tous les passages entre celles-ci. Le passage central est celui entre le registre algébrique et le registre graphique.

On trouve bien moins de changements de registre après le passage au lycée en 2<sup>de</sup> et le registre des tableaux n'est plus utilisé. Les travaux impliquant des situations réelles et les passages venant de la réalité ou allant vers elle sont fréquents jusqu'en 4<sup>e</sup> mais diminuent fortement après. En 2<sup>de</sup> on ne trouve pratiquement plus de liens avec des situations réelles dans les livres de classe.

La Grundvorstellung d'association et celle de covariation sont utilisées. Lors de l'introduction de la proportionnalité il y a une certaine préférence pour la Grundvorstellung de covariation qui disparaît ensuite. Comme les situations de proportionnalité ne sont souvent pas vues comme des situations fonctionnelles, on ne peut pas parler de l'utilisation de Grundvorstellungen concernant la pensée fonctionnelle. Les Grundvorstellungen ne jouent pas non plus un grand rôle lors de la définition de fonctions affines, car l'apprentissage de la capacité de passer d'une représentation à une autre y occupe une place centrale.

La définition de la notion de fonction en 2<sup>de</sup> se réfère à la Grundvorstellung d'association. Mais le travail avec les tableaux de variation et donc la Grundvorstellung de covariation commence immédiatement après cette définition. La direction de variation des fonctions y est analysée en détail, mais le type de variation n'est pratiquement pas pris en compte. Il n'existe par exemple pas de comparaison entre le type de variation d'une fonction linéaire et d'une fonction carrée pour mettre en avant la différence fondamentale de variation.

Les associations ne jouent pas en grand rôle dans les problèmes posés. On peut donc poser la question de savoir si cette différence entre la définition en tant qu'association et l'utilisation des fonctions pour décrire des variations ne crée pas des problèmes.

L'utilisation de la Grundvorstellung d'objet ne peut être trouvée dans aucun des livres.

Étant donné que les fonctions sont seulement définies en 3<sup>e</sup> voire en 2<sup>de</sup>, le concept d'action, de processus ou d'objet ne peut pas être utilisé auparavant. On peut identifier un concept d'action dans certains problèmes préliminaires mais la plupart des problèmes travaillent avec un concept de processus. Le concept d'objet n'apparaît pas.

On ne peut pas constater de fortes divergences entre les programmes et les livres de classe, bien qu'il n'y ait pas de validation officielle des livres par l'État. Mais plusieurs contenus sont répétés ou introduits plus tôt que prévu dans les programmes (Par exemple la proportionnalité dans le registre algébrique en 6<sup>e</sup>).

Le concept image des élèves français peut contenir certaines restrictions. Pendant cinq ans ils ne voient que les dépendances proportionnelles et affines, ce qui peut favoriser le développement d'une fixation linéaire.

La définition qui est donnée de la notion de fonction restreint les dépendances fonctionnelles aux associations entre des intervalles de nombres réels, et la plupart des courbes qui sont étudiées par la suite sont continues. D'autres exemples sont donnés mais rarement, ce qui peut également mener à une restriction du concept image.

Les élèves français résolvent beaucoup de problèmes dans lesquels ils doivent identifier des relations fonctionnelles et certains types de fonctions dans des situations réelles ou dans d'autres représentations. On peut donc s'attendre chez les élèves français à une bonne capacité à reconnaître les dépendances fonctionnelles.

### 7.3 Comparaison des livres de classe

De grandes différences entre les manuels scolaires français et allemands sont visibles dès qu'on compare leur structure.

Les livres bavaois s'orientent de très près sur les programmes, ce qui se reflète même dans la suite des chapitres. En France, par contre, la structure est plus indépendante, bien que les programmes soient imprimés à l'intérieur des manuels. De plus les livres français fournissent des explications sur la manière dont ils doivent être utilisés. Une partie comprenant le cours ainsi que des exercices résolus permettent un travail autonome des élèves. Les livres bavaois, spécialement ceux de la Hauptschule et de la Realschule, ont plus le caractère d'une collection de problèmes à résoudre.

Dans les deux pays le registre algébrique est le fil conducteur pour l'introduction de nouveaux types de dépendances fonctionnelles.

Le travail sur les associations proportionnelles et les fonctions affines se prolonge bien plus en France qu'en Allemagne. Les autres types de fonctions ne sont vus qu'à partir de la 2<sup>de</sup>. Les élèves de la neuvième classe (3<sup>e</sup>) de la Hauptschule connaissent un plus grand nombre de types de fonctions que les élèves de 3<sup>e</sup> en France, où par exemple les fonctions de la proportionnalité inverse n'ont pas encore été étudiées.

Cela vaut aussi pour la 2<sup>de</sup> où les élèves français voient les fonctions carrées, les fonctions de la proportionnalité inverse et les fonctions cosinus et sinus. Les élèves bavaois qui n'ont pas encore quitté le système scolaire en connaissent plus, comme par exemple les fonctions exponentielles. Ceux qui vont au Gymnasium travaillent en plus sur les fonctions puissances simples, les fonctions racine carrée et toutes les fonctions trigonométriques.

Les moments auxquels la notion de fonction est définie dans les deux pays sont très différents. En France elle est définie en 2<sup>de</sup> en tant qu'association. En Bavière, par contre, il existe de très grandes différences entre les différents types d'écoles. A la Hauptschule on travaille sur les fonctions sans jamais les définir, ce qui correspond à l'usage de la 3<sup>e</sup> en France. A la

Realschule et au Gymnasium les fonctions sont définies dans la huitième ou la neuvième classe (4<sup>e</sup> ou 3<sup>e</sup>) en tant que relations spéciales ou associations. La plupart des élèves allemands travaillent donc bien plus tôt avec la notion de fonction que les élèves français. La notion de fonction n'est introduite ni en France ni en Allemagne en tant que notion unifiant les concepts de plusieurs dépendances fonctionnelles étudiées auparavant. Elle est définie rapidement à la suite de l'utilisation des fonctions affines. Les deux pays s'exposent ainsi au risque que les élèves développent un concept de définition indépendante de leur concept image. Ce risque est probablement le plus grand à la Realschule bavaroise, où le travail sur les relations n'est pas prolongé après la définition des fonctions.

Il existe plusieurs parallèles entre l'enseignement des deux pays, concernant l'utilisation des registres et des passages entre ceux-ci. Tous les registres sont introduits et utilisés, mais le rôle du registre des tableaux diminue souvent dans les niveaux élevés. Les registres centraux sont le registre algébrique et le registre graphique et beaucoup de problèmes traitent du passage entre eux. Cependant le rôle des passages entre les registres diminue en 2<sup>de</sup> en France. Les deux pays associent étroitement la définition de la notion de fonction et les représentations algébriques, ce qui peut mener à une confusion entre l'idée mathématique et sa représentation.

L'influence des applications diminue dans les niveaux élevés en France et à la Realschule, mais elle reste forte à la Hauptschule et au Gymnasium. En France on propose souvent des applications venant de la géométrie.

Les deux pays travaillent avec la Grundvorstellung d'association et de covariation. La Grundvorstellung d'association est mise en avant lors de la définition de la notion. La Grundvorstellung de covariation peut être retrouvée dans un grand nombre de problèmes proposés par tous les manuels analysés, mis à part ceux de la Realschule où elle est bien moins présente. L'utilisation est spécialement forte en France, où la variation est déjà étudiée avec la proportionnalité. Elle devient le point central de la plupart des problèmes en 2<sup>de</sup>. On doit cependant remarquer que seule la direction de la variation est le sujet d'études, le type de variation n'étant pas pris en considération.

L'utilisation de la Grundvorstellung d'objet peut être identifiée de manière très primitive dans les livres de classe bavarois. En France elle n'est pas encore utilisée.

A la fin de la période étudiée, les élèves français connaissent donc moins de types de fonction que les élèves allemands qui n'ont pas quitté l'école après la neuvième (3<sup>e</sup>). Cela peut mener à des restrictions du concept image, tout comme l'étude très longue des dépendances linéaires. On peut s'attendre à des concepts images restreints de la même manière de la part des élèves de la Hauptschule, et, à un degré moins élevé, également de la part des élèves des branches basses de la Realschule.

La très grande majorité des fonctions vues dans les deux pays sont des associations continues entre des nombres réels. Cela va également influencer le concept image des élèves.

Les concepts images des élèves concernant les fonctions seront donc très différents d'un pays à l'autre et entre les différentes écoles. Comme la scolarité obligatoire s'arrête pour beaucoup d'élèves avec la fin de la période analysée dans ce travail, on peut constater qu'il ne faut pas s'attendre à une compréhension commune de toute la population concernant les dépendances fonctionnelles.

Une autre particularité des livres de classe français influence probablement le travail des élèves. L'utilisation de problèmes résolus de manière exemplaire, auxquels les élèves sont renvoyés lors du travail avec d'autres problèmes, peut mener à des automatismes sans compréhension réelle du contenu. Les élèves sont amenés à relier un problème à un problème type pour s'engager dans une suite d'automatismes menant à la solution. Les problèmes atypiques, qui ne correspondent pas aux schémas connus, causent plus de difficultés dans ce cas-là.

Ce centrage sur les techniques à utiliser pour résoudre certains problèmes peut probablement aussi être expliqué par leur grande importance dans la recherche française en didactique des mathématiques (par exemple dans les travaux d'Yves Chevallard).

Le présent travail se concentre sur le développement de la pensée fonctionnelle et n'analyse pas en détail les techniques utilisées dans les deux pays. Les Grundvorstellungen et Grundkenntnisse sont de grande importance pour pouvoir utiliser les techniques de manière réfléchie et efficiente, permettant ainsi d'activer ces techniques. Cette connexion relie les techniques à la pensée fonctionnelle et à son cadre théorique, et ouvre ainsi la voie pour des recherches plus détaillées.

Les analyses de ce chapitre montrent que la majorité des élèves français et allemands n'ont pas la possibilité de développer la pensée fonctionnelle dans toute son étendue à la fin de la période prise en considération. En France les élèves connaissent peu de types de fonctions et ils n'ont pas comparé les différents types de variation. Les élèves de la Hauptschule et des branches basses de la Realschule connaissent aussi relativement peu de types de fonctions. Seuls les élèves de la branche mathématique de la Realschule et ceux du Gymnasium ont un grand nombre de types de fonctions à leur disposition. Ils ont aussi travaillé avec tous les registres de représentation et savent effectuer les passages entre ceux-ci, ce qui fait qu'ils ont les meilleures bases pour développer la pensée fonctionnelle à la fin de la dixième (2<sup>de</sup>).

Les questions posées à la fin du sixième chapitre peuvent être reposées maintenant, car les analyses du curriculum potentiel confirment les résultats des analyses du curriculum souhaité :

Ne renforce-t-on pas la fixation linéaire en France en laissant travailler les élèves pendant plusieurs années exclusivement sur la proportionnalité ?

Est-ce qu'en Allemagne on n'introduit pas trop tôt beaucoup de types de fonctions, alors que les élèves ne sont pas encore capables de les assimiler ?

Les élèves allemands n'ont-ils pas une Grundvorstellung de covariation sous développée étant donné qu'ils étudient bien moins les variations que leurs collègues français ?

Les chapitres suivants vont tenter de répondre à ces questions.





## 8 Analyses quantitatives

Les chapitres précédents ont analysé ce que les élèves devraient apprendre jusqu'à la 2<sup>de</sup> concernant la pensée fonctionnelle dans chaque système scolaire. Il s'agit maintenant d'essayer de montrer ce que les élèves en retiennent et s'ils sont capables d'utiliser leurs savoirs.

Il est difficile de donner une image exacte du curriculum atteint concernant la pensée fonctionnelle en France et en Allemagne. Les études PISA 2003 et PALMA vont être utilisées dans ce travail pour avoir d'une part un point de repère au niveau international avec PISA 2003 et d'autre part une image du développement durant plusieurs années avec PALMA.

### 8.1 PISA 2003

PISA 2003 (Programme for International Student Assessment) est une très grande étude représentative de comparaison internationale, à laquelle ont participé la France et l'Allemagne. Elle est financée par l'OCDE et analyse les performances des élèves à l'âge de 15 ans. 4.000 élèves français et 4.660 élèves allemands y ont participé en 2003.

PISA 2003 mesure, entre autre, les performances des élèves dans le domaine de *mathematical literacy*. En Allemagne cette étude a été étendue de manière à obtenir des données représentatives sur les différents Etats fédéraux. (OECD, 2003a; OECD, 2004b)

La première partie de ce chapitre utilise cette sous échelle pour comparer le curriculum atteint par les élèves français et allemands peu de temps avant la fin de la période analysée.

Les problèmes de PISA 2003 sont associés à plusieurs sous échelles. L'une d'entre elles, la sous échelle *variations et relations*, a une définition très proche de la définition de la pensée fonctionnelle. Une bonne résolution des problèmes associés à cette sous échelle nécessite beaucoup de capacités directement reliées à la pensée fonctionnelle. Les applications y jouent un rôle largement dominant et il n'y a pas de problèmes purement mathématiques. Seules les fonctions affines apparaissent comme type concret de fonction. Une analyse plus détaillée des problèmes de la sous échelle montre qu'elle reproduit une partie centrale de la pensée fonctionnelle sans, pour autant, pouvoir la reproduire dans toute son étendue.

Les types de problèmes et les contenus utilisés ne sont pas complètement nouveaux pour les élèves de France et de Bavière, mais il ne s'agit pas non plus de problèmes typiques présentés dans les manuels scolaires. Ceci peut constituer une difficulté spéciale pour les élèves français, qui sont davantage habitués à travailler sur des problèmes standards.

Les élèves français obtiennent de meilleurs résultats sur la sous échelle *variations et relations* que les élèves allemands. A l'intérieur de l'Allemagne ce sont les élèves bavarois qui obtiennent les meilleurs résultats avec un score qui est même meilleur que le score des élèves français. (Prenzel et al., 2004a, p. 6)

Les analyses des résultats français ramènent ce point fort des élèves de ce pays au travail détaillé sur la proportionnalité et à l'utilisation de la représentation graphique (Bourny et al., 2004, p. 3). Cela correspond également aux résultats des analyses des chapitres précédents. Le très bon score des élèves bavarois doit être considéré dans le contexte de leur bonne

performance générale. En Bavière la sous échelle *variations et relations* ne constitue pas un point fort des élèves comme c'est le cas pour les élèves français.

### **Differential item functioning**

Pour ajouter de la précision aux analyses du niveau des échelles on peut aussi se pencher sur les résultats au niveau des items. Ce travail identifie à l'aide d'analyses spécifiques certains items qui se détachent du reste de ceux-ci lors des analyses binationales.

Les analyses de differential item functioning (en abrégé DIF) se basent sur l'hypothèse que les différents systèmes d'enseignement ne se différencient pas seulement en ce qui concerne leur effectivité générale, mais produisent aussi des points forts et des points faibles pour les élèves (Klieme & Baumert, 2001, p. 386). John Keeves et Geoffrey Masters notent au sujet des items qui révèlent ce genre de points forts ou faibles :

The detection of this type of biased items provides information of value in education, because the existence of bias reflects either differences in the learning experiences involved for providing a correct response to the item, or deficiencies in the construction of an item so that it would favour on particular group to the disadvantage of the other group. (Keeves & Masters, 1999, p. 12)

Un *item fonctionnant de manière différentielle* est un item qui produit dans deux populations une différence de probabilité de résolution qui ne peut pas être expliquée par les différentes performances des deux populations en ce qui concerne la variable analysée. Il est important de bien faire la différence entre l'*item impact*, c'est-à-dire une différence dans la probabilité de résolution d'un item causé par une différence de performance dans la variable analysée, et le DIF, où les différentes performances subsistent bien que la différence de la variable mesurée soit contrôlée.

Dans ce chapitre des analyses de DIF sont faites avec les items de la sous échelle *variations et relations* pour détecter les points forts et les points faibles des deux pays. Ces analyses sont faites avec l'aide du modèle uni paramétrique de Rasch, qui est aussi utilisé pour l'évaluation de PISA et PALMA.

Les résultats montrent qu'aucun item n'a un effet beaucoup plus grand que le seuil minimum permettant de pour pouvoir parler d'un effet substantiel. Cela montre qu'aucun item ne favorise fortement les élèves d'un pays.

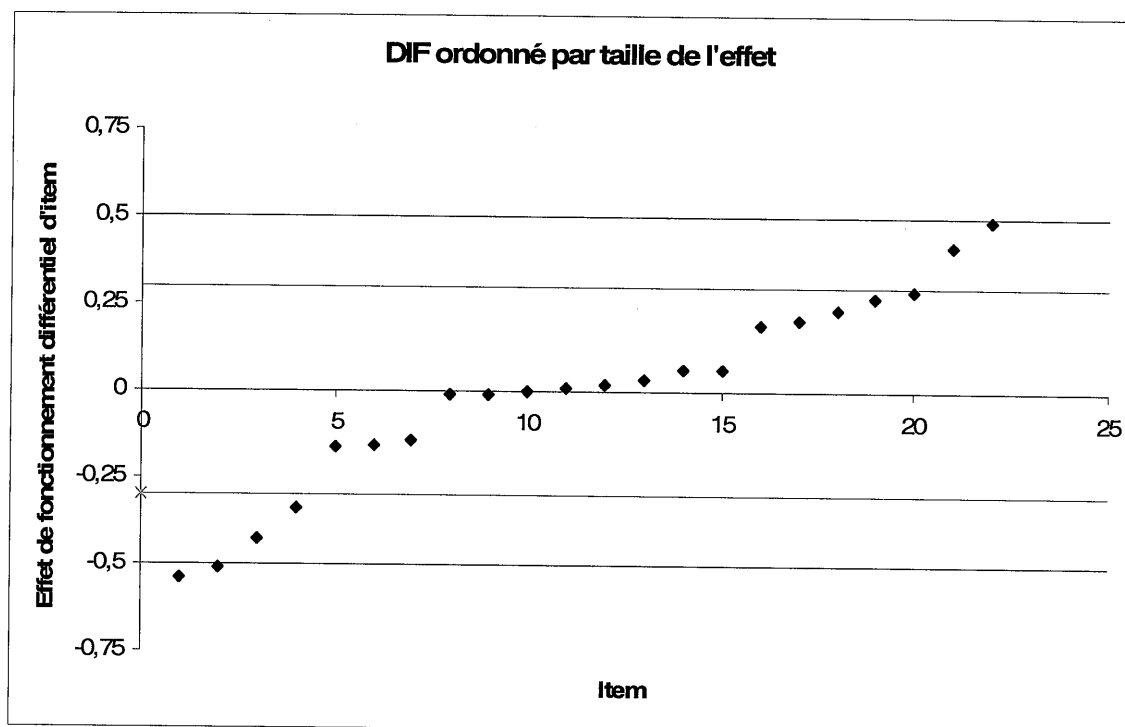


Figure 9: DIF par taille

Il y a tout de même deux items qui ont un effet substantiel (plus grand que 0,5) et quatre autres items dont la taille de l'effet se sépare nettement de la taille de l'effet du groupe des items restants (plus grand que 0,3 mais plus petit que 0,5). Les deux items à effet substantiel indiquent des points forts des élèves français, tout comme deux des quatre items ayant un effet moins grand. Les deux items restant révèlent des points forts des élèves allemands.

L'analyse du contenu des items qui ont été identifiés montre que ces effets peuvent être expliqués par des spécificités des programmes des deux pays.

Dans le premier des deux items à effet substantiel montrant un point fort des élèves français, il s'agit de reconnaître une relation affine simple dans un texte et de l'évaluer ensuite pour un certain nombre. Une explication pour ce point fort français serait que cet item peut être résolu sans compréhension réelle de la situation, en ignorant le contexte et en effectuant le calcul demandé. Dans les livres de classe français on peut trouver ce genre de problèmes. Cette explication est soutenue par le fait que l'item suivant appartenant au même problème ne montre plus d'effet. Cet item demande la représentation algébrique de la fonction affine qui a été utilisée auparavant.

Le second item à effet substantiel requiert un travail qualitatif avec la représentation graphique. Il s'agit de reconnaître des parties et des points importants de la courbe pour la retracer dans un autre système de coordonnées cartésiennes. Les élèves de 2<sup>de</sup> peuvent directement utiliser ce qu'ils ont appris lors du travail avec les tableaux de variation. Les élèves allemands par contre n'ont pratiquement pas vu ce genre de problèmes, ce qui peut expliquer l'effet substantiel de cet item.

Les deux autres items qui révèlent des points forts français sont des items traitant de l'étude de variation. Cette constatation d'un point fort renvoie directement aux analyses des

programmes et des manuels scolaires, où il a été constaté que la Grundvorstellung de covariation est largement utilisée en France, spécialement à partir de la 2<sup>de</sup>.

Le premier item à effet faible indiquant un point fort allemand utilise également la Grundvorstellung de covariation, mais en reliant la variation à des situations réelles. La plupart des problèmes de variation des livres de classe français se cantonnent dans le domaine purement mathématique.

Le second item à effet positif pour les élèves allemands demande d'utiliser une fonction à quatre variables, donnée dans sa représentation algébrique, et de l'évaluer pour certaines données que les élèves doivent extraire d'un tableau. Ce type de fonction n'apparaît pas dans les livres de classe français, ce qui renvoie de nouveau à l'explication des problèmes exemplaires utilisés en France créant de difficultés lors de l'apparition de problèmes à type inconnu.

Il est intéressant de remarquer qu'il n'y a pas d'avantage pour un des pays si on considère les types de fonctions utilisés dans les problèmes. Les relations proportionnelles et affines ne constituent pas des points forts français, bien qu'elles aient été étudiées bien plus longtemps qu'en Allemagne.

Quelques attentes des chapitres précédents (comme le point fort des élèves français concernant l'étude des variations) ont pu être confirmées par les analyses de DIF. Les effets d'autres différences (comme l'étude plus étendue des situations de proportionnalité en France) n'ont par contre pas pu être observés.

## 8.2 PALMA

Le caractère transversal de l'étude PISA 2003 permet de comparer les performances des élèves français et allemands mais il rend impossible toute analyse de développement. Ce développement peut être retracé grâce à l'étude longitudinale PALMA.

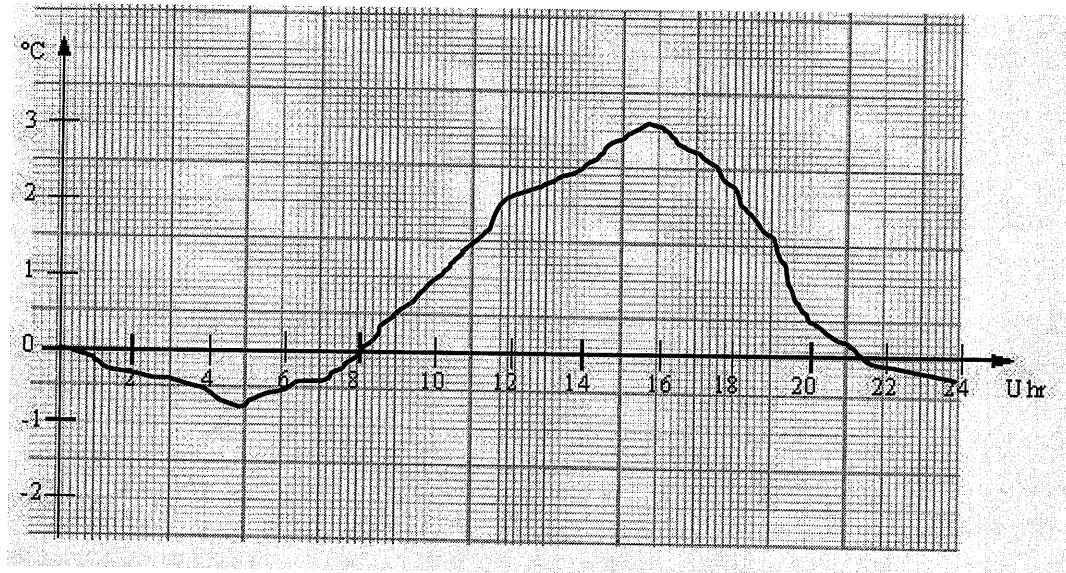
PALMA (Projekt zur Analyse der Leistungsentwicklung in Mathematik ; Projet pour l'analyse du développement des performances en mathématiques) est une étude représentative longitudinale faite en Bavière, qui montre le développement des performances en mathématiques de la cinquième (CM2) à la dixième (2<sup>de</sup>). Elle est financée par la DFG (Deutsche Forschungsgemeinschaft). 2.000 à 2.500 élèves sont évalués chaque année et 1.318 d'entre eux y ont participé tous les ans depuis six ans.

Les données ont été recueillies jusqu'à la neuvième (3<sup>e</sup>), ce qui permet de retracer le développement en Bavière sur quasiment la totalité de la période analysée dans ce travail. Des détails sur la conception et les résultats de PALMA peuvent être trouvés dans Hofe et al. (2002), Hofe et al. (2005a), Hofe et al. (2005b) ou Pekrun et al. (2006).

Cette sous échelle est constituée de 177 items concernant des points centraux de la pensée fonctionnelle, comme par exemple le travail avec les différents registres de représentation dans les classes basses. (Figure 10 et Figure 11).

### Problème : Passau

Pendant un jour en janvier la température de l'air a été mesurée à Passau.  
Le graphique suivant montre le changement de la température pendant ce jour:



- a) Quelle température faisait-il à 14 heures ?
- b) A quelle heure est-ce qu'il faisait le plus froid ?
- c) A quelle heure est-ce qu'il faisait 0°C ?

Figure 10: Problème Passau

### Problème : Devises

Le tableau suivant aide à effectuer la conversion de Dollar à Euro.

Dollar	Euro
0,10	0,13
1,00	1,30
2,00	2,60
5,00	6,50
10,00	13,00
20,00	26,00
50,00	65,00

Réponds aux questions suivantes avec l'aide du tableau :

- a) Combien de Dollars est-ce qu'on obtient pour 26,00 Euros ?
- b) Combien d'Euros est-ce qu'on obtient pour 5,00 Dollars ?
- c) Combien d'Euros est-ce qu'on obtient pour 7,00 Dollars ?

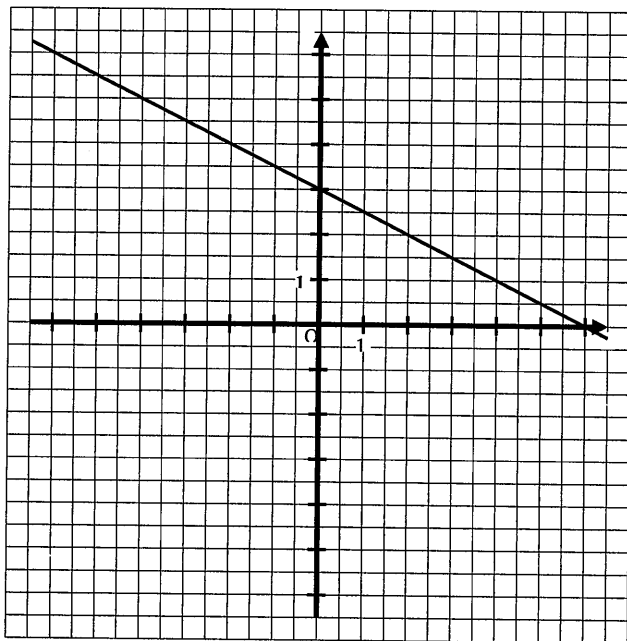
Figure 11: Problème Devises

Les tests donnés aux élèves dans les classes plus élevées contiennent en plus des problèmes concernant des passages entre les différentes représentations mathématiques de dépendances fonctionnelles (Figure 12)

D'autre part les élèves doivent travailler avec des situations fonctionnelles dans des contextes réels (Figure 13)

### Problème : Graphique C

Note l'équation de la droite donnée par le graphique.



Équation:

$y =$  \_\_\_\_\_:

Figure 12: Problème Funktionsgraph C

### Problème : Goethestraße A

Des amis décident d'acheter ensemble une grande maison avec plusieurs appartements. Les appartements sont de différentes tailles. Chacun doit payer un prix qui est proportionnel à la taille de son appartement.

Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont justes ?

	juste	faux	Je ne sais pas
Si le prix de la maison baisse de 10% chacun doit payer 10% de moins	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Si on connaît la superficie de l'appartement A et de l'appartement B et le prix de l'appartement A on peut aussi calculer le prix de l'appartement B.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Les acheteurs du plus grand appartement payent plus pour chaque mètre carré que les acheteurs du plus petit appartement.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Si on connaît le prix de toute la maison et si on sait combien chaque propriétaire paye, on peut calculer la superficie de chaque appartement.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

Figure 13: Problème Goethestraße A

Ces quatre problèmes montrent que la sous-échelle a été construite de manière à pouvoir mesurer le développement de la pensée fonctionnelle des élèves bavarois. Les items ont souvent un lien direct avec une situation réelle, mais à la différence de PISA certains items restent dans un cadre purement mathématique.

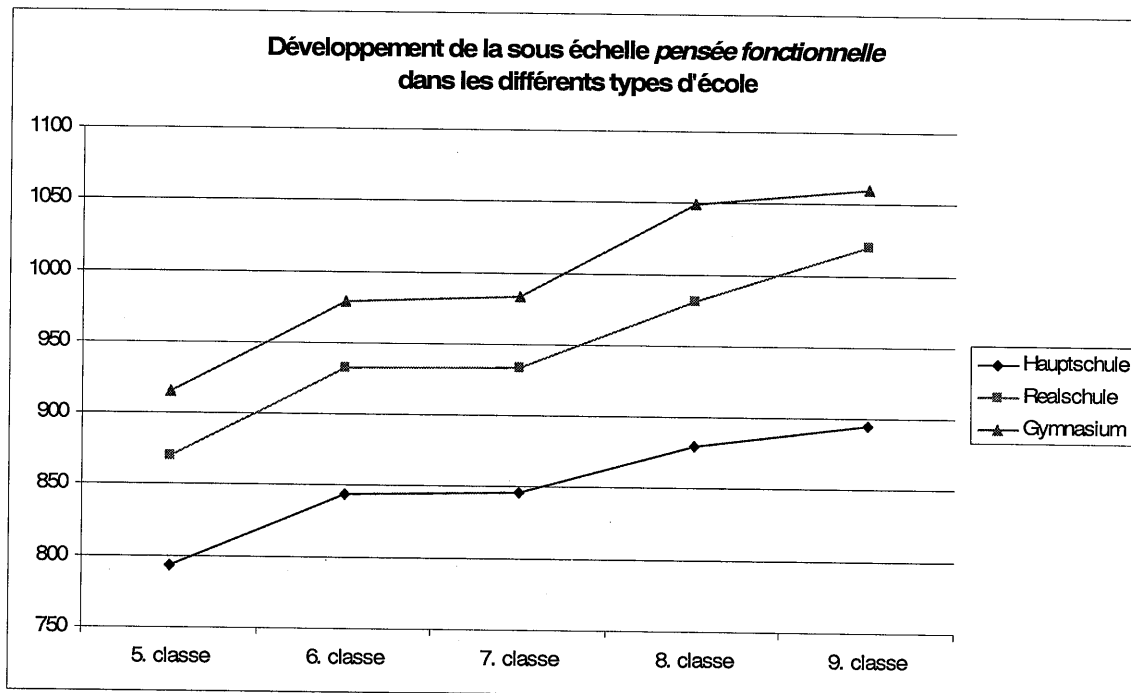
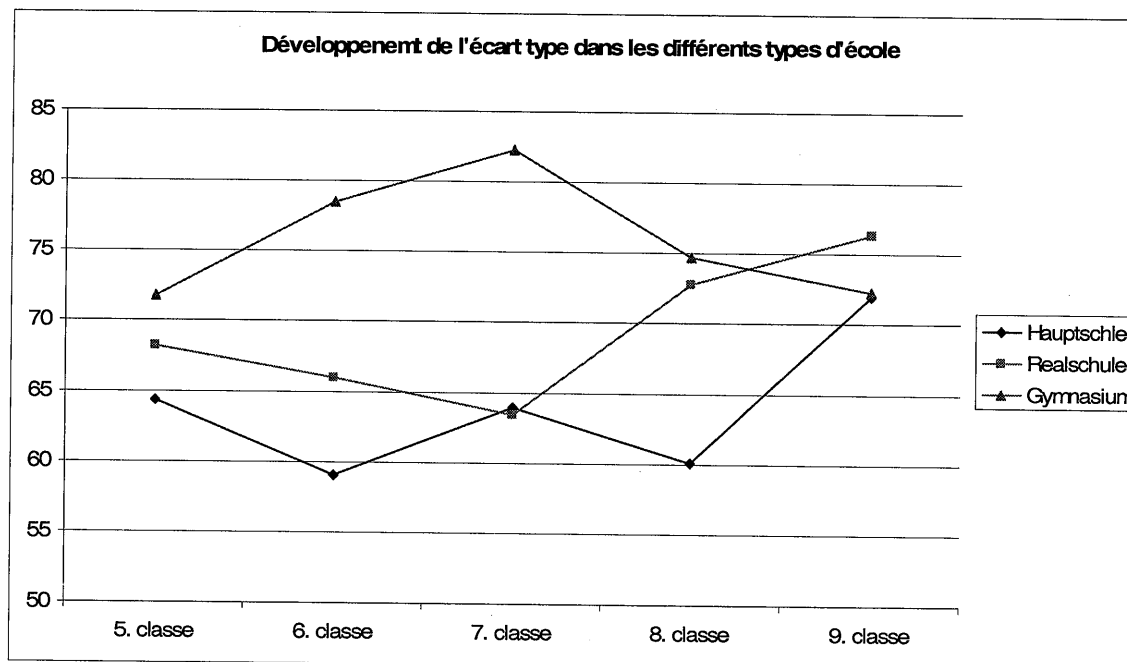


Figure 14: Développement de la sous échelle *pensée fonctionnelle*



Le graphique montre le développement de la performance moyenne des élèves ayant participé chaque année à l'évaluation de PALMA. Les données sont normées de telle manière que la moyenne de la neuvième classe soit de 1009 points et l'écart type correspondant de 99 points. Les écarts types pour toutes les classes et tous les types d'écoles sont indiqués dans le second graphique.



**Figure 15: Développement de l'écart type de la sous échelle pensée fonctionnelle**

Les graphiques montrent qu'il n'y pas de développement continu de la pensée fonctionnelle. Les performances moyennes augmentent de manière différente entre les années consécutives. En cinquième (CM2) les élèves de la Hauptschule ont déjà un grand retard sur les performances des élèves de la Realschule et du Gymnasium. Cet écart s'agrandit encore plus au cours des années suivantes. L'écart entre les performances des élèves de la Realschule et ceux du Gymnasium, par contre, reste relativement stable.

La taille des accroissements et les variations de l'écart type peuvent être ramenées dans beaucoup de cas à des raisons venant des programmes et des manuels scolaires.

En 5. classe il y a par exemple que très peu de contenus concernant la pensée fonctionnelle dans les programmes. Dans la 6. classe les élèves de la Realschule et du Gymnasium travaillent pour la première fois avec les situations fonctionnelles et les différents registres sont utilisés de manière intensive, ce qui est aussi le cas à la Hauptschule. Il est donc possible, d'expliquer la forte augmentation des performances des élèves par les progrès concernant le travail avec les situations de proportionnalité et l'utilisation des différentes représentations. Entre la 8. et la 9. classe les performances des élèves augmentent de manière modérée à la Hauptschule et au Gymnasium, tandis qu'on constate une grande augmentation à la Realschule. La diminution de l'augmentation à la Hauptschule avait été attendue. Les élèves apprennent peu de nouveaux contenus et ne travaillent plus autant avec des situations fonctionnelles que dans les précédentes. L'analyse des programmes et des livres de classe du Gymnasium, avait également mené au constat que la place consacrée aux situations

fonctionnelles diminue entre le 8. et la 9. classe. Un autre facteur qui a pu faire diminuer la croissance des performances des élèves du Gymnasium est, que les contenus traités dans la 9. classe du Gymnasium (comme par exemple les fonctions inverses) ne sont pas un élément central de l'évaluation PALMA. L'accroissement des résultats des élèves de la Realschule peut, tout comme les résultats des autres années, être ramené aux contenus des programmes (dans ce cas spécialement aux contenus des branches basses de la Realschule) (voire chapitre 8 pour des détails).

La continuité du développement de la pensée fonctionnelle est donc influencée en grande partie par les contenus étudiés en classe et par le temps passé sur ceux-ci. Une autre répartition pourrait par conséquent probablement mener à une croissance plus continue de la pensée fonctionnelle.



## 9 Analyses qualitatives

Il est difficile de repérer les modes de pensée et les raisons exactes de certaines difficultés dans des études réalisées à grande échelle avec des questionnaires. Ce genre d'informations peut être recueilli de manière plus précise en utilisant des interviews, où il est possible de réagir de manière flexible aux réponses des élèves et où on peut essayer de relier les difficultés à des déficits concernant les Grundvorstellungen et le concept image.

L'étude PALMA est accompagnée de plusieurs séries d'interviews semi-standardisées. Chaque année, depuis 2003, 36 élèves venant de trois écoles différentes sont interviewés individuellement pendant 30 minutes.

En 2005 les interviews ont été réalisées dans des huitièmes classes (4<sup>e</sup>) de trois Realschule. La grande majorité des problèmes posés vient du test écrit de PALMA, avec quelques légères adaptations. Les huit problèmes posés en 2005 étaient centrés autour de la pensée fonctionnelle.

En 2006 une étude parallèle d'interviews a pu être réalisée à Paris dans le cadre d'une année d'études financée par le DAAD (Deutscher Akademischer Austauschdienst). Douze élèves de 3<sup>e</sup> venant de deux collèges différents de la région parisienne ont été interviewés individuellement pendant 30 minutes. Les problèmes posés étaient les mêmes que ceux des interviews allemands de 2005. Le son de toutes les interviews réalisées en Bavière et en France a été enregistré.

Les participants français ont donc été scolarisés une année de plus que les participants allemands. Cette différence vient du fait, qu'il n'a pas été possible pour des raisons de contenus, de mener les interviews françaises dans des classes du même niveau qu'en Allemagne. En France les élèves de 4<sup>e</sup> ne connaissent que très peu de types de dépendances fonctionnelles. Il a donc été décidé après consultations des professeurs de mener les interviews en 3<sup>e</sup> où par exemple, les fonctions linéaires sont introduites.

Ces interviews réalisées dans les deux pays permettent d'illustrer certains déficits et points forts concernant la pensée fonctionnelle identifiés dans les chapitres précédents. Le nombre limité d'interview et leur caractère non représentatif ne permettent pas de comparaisons quantitatives entre les deux pays. Il est cependant possible de formuler des hypothèses sur les raisons de certaines difficultés et de les relier aux résultats des analyses des programmes et des manuels scolaires.

### 9.1 Les problèmes

Les six problèmes suivants ont, entre autres, été travaillés dans les interviews.

Les deux premiers problèmes sont des problèmes techniques où une équation doit être résolue dans le registre algébrique. Pour les résoudre il n'est pas nécessaire de faire un passage dans d'autres registres.

**Problème: Équation**

Trouver x.

$$5 - 4x = 1$$

Figure 16: Problème Équation

**Problème: Équation avec fraction**

Trouver x.

$$\frac{56}{x} = 7$$

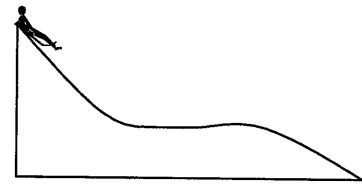
Figure 17: Problème Équation avec fraction

Ces problèmes ont pour but de tester les capacités techniques des élèves et de relever leur compréhension des méthodes choisies. Par ailleurs ces problèmes doivent faciliter l'entrée des élèves dans la situation d'interview. Dans le test écrit de PALMA, 61,6% des élèves de la 8. classe (4<sup>e</sup>) ont su trouver la bonne solution du problème *Équation*. Le problème *Équation avec fraction* ne faisait pas partie du test écrit de la 8. classe.

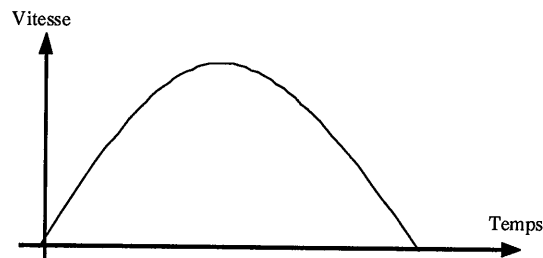
Le problème *Luge* donne une situation fonctionnelle dans un graphique. Les élèves doivent choisir une courbe qui représente de manière correcte la vitesse du conducteur de la luge en fonction du temps. Il s'agit d'un passage du registre du langage parlé au registre graphique. Lors de ce passage il est nécessaire d'utiliser principalement la Grundvorstellung de covariation, mais le problème peut également être résolu en identifiant des points marquants du graphique et en y étudiant la vitesse.

### Problème: Luge

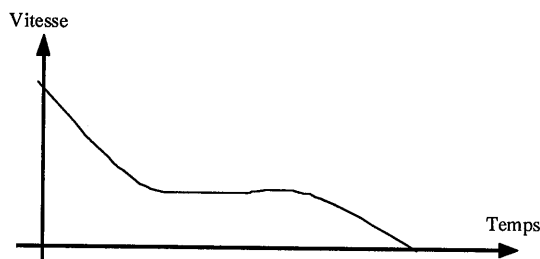
Quelle courbe donne la vitesse du conducteur de la luge en fonction du temps ?



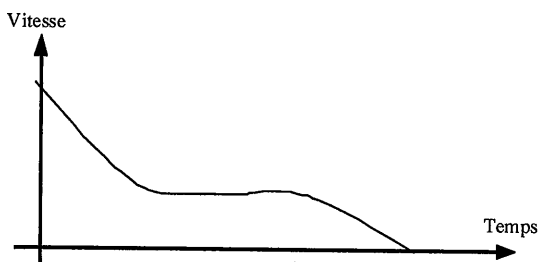
☐



☐



☐



☐

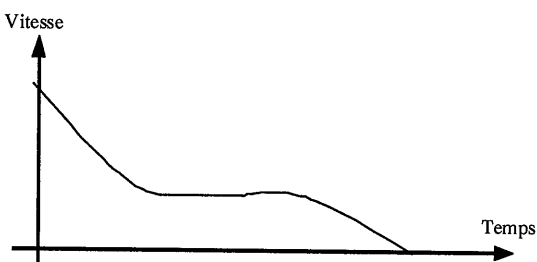


Figure 18: Problème Luge

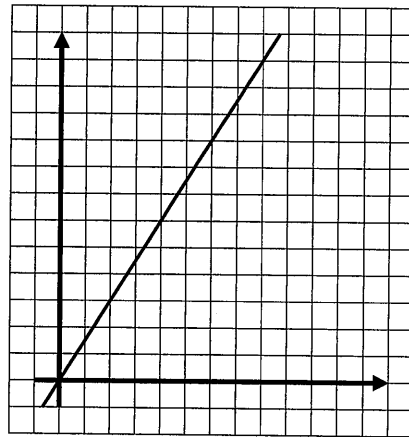
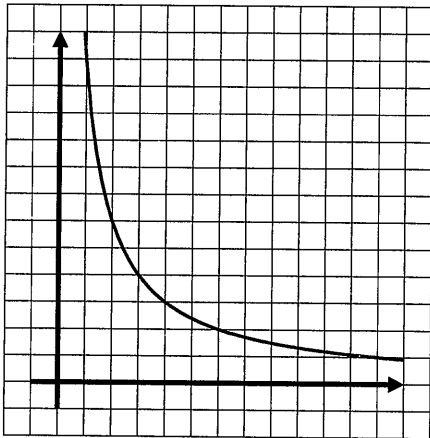
Le problème *Attribuer les courbes* est formé de deux parties. A chaque fois la représentation graphique d'une fonction doit être liée aux situations réelles. Les élèves ont le choix entre quatre situations réelles différentes dans les deux cas et doivent expliquer si les situations peuvent être représentées par les graphiques donnés. Le problème français est une légère modification du problème allemand où deux situations ont été reformulées (*Poids de la viande* → *Prix payé* a remplacé *US-Dollar* → € et € → *US-Dollar* ; *Vitesse du train* → *Temps pour parcourir 100 km* a remplacé *Largeur d'un rectangle* → *Hauteur du rectangle en gardant la superficie constante*).

Les élèves doivent effectuer un passage entre la situation réelle et la représentation graphique pour trouver la solution de ce problème. Pour faire ceci ils ont spécialement besoin de la Grundvorstellung de covariation pour pouvoir reconnaître le type de variation et ainsi classifier la situation fonctionnelle.

Dans le test écrit de PALMA, 17,8% des élèves de la 8. classe (4<sup>e</sup>) ont su trouver la bonne solution pour le premier graphique et 18,6% pour le second.

### Problème : Attribuer les courbes

Choisir pour chaque courbe une relation.



- |  |   |
|--|---|
| <input type="radio"/> Poids de la viande → Prix payé                                   | <input type="radio"/> Durée des communications → Prix avec abonnement                     |
| <input type="radio"/> Vitesse du train → Temps pour parcourir 100 km                   | <input type="radio"/> Age d'un homme → Taille de celui-ci                                 |
| <input type="radio"/> Hauteur de chute d'une pierre → Vitesse quand elle touche le sol | <input type="radio"/> Nombre de travailleurs → Temps de travail nécessaire pour une tâche |
| <input type="radio"/> Durée de stationnement → Prix                                    | <input type="radio"/> Poids de la viande → Prix   |

Figure 19: Problème Attribuer les courbes

Pour la résolution du problème *Bougie* il s'agit de donner la représentation algébrique d'une situation fonctionnelle donnée dans le registre du langage parlé. Dans le test écrit de PALMA de la 8. classe ce problème était séparé en deux parties. Les élèves devaient d'abord calculer la hauteur de la bougie après dix minutes et puis donner une formule générale. 41,1% des élèves savent calculer la hauteur après dix minutes et 19,8% donnent la bonne représentation algébrique.

### Problème: Bougie

Une bougie a une hauteur de 30 cm. Quand elle brûle 1 minute sa hauteur diminue de 0,1 cm.

Donner une formule avec laquelle on peut calculer la hauteur de la bougie après x minutes.

Figure 20: Problème Bougie

Le dernier problème présenté ici est le problème *Récipients*, dans lequel une situation fonctionnelle est donnée par un texte et une image. Les élèves doivent donner une représentation graphique de la situation en utilisant les systèmes de coordonnées cartésiennes fournis. L'axe des abscisses du système de coordonnées fourni est nommé *Temps* et l'axe des ordonnées *Hauteur de l'eau*. Il n'y a pas de graduations des axes.

Pour réussir à faire le passage entre la situation réelle et le registre graphique, les élèves peuvent utiliser la Grundvorstellung de covariation ou la Grundvorstellung d'association. Il est nécessaire que les élèves comprennent que si l'eau arrive à vitesse constante, le niveau de l'eau montera plus rapidement aux endroits étroits du récipient qu'aux endroits larges.

Dans le test écrit de PALMA, 67,1% des élèves de la 8. classe (4<sup>e</sup>) ont su trouver la bonne solution pour le premier récipient, 11,2% pour le second et 21,7% pour le troisième.

### Problème: Récipients

Sur ces images on voit des récipients de différentes formes qui ont la même hauteur. Dans les trois cas l'eau arrive à vitesse constante dans les récipients.

Dessiner la hauteur de l'eau dans chaque récipient en fonction du temps.

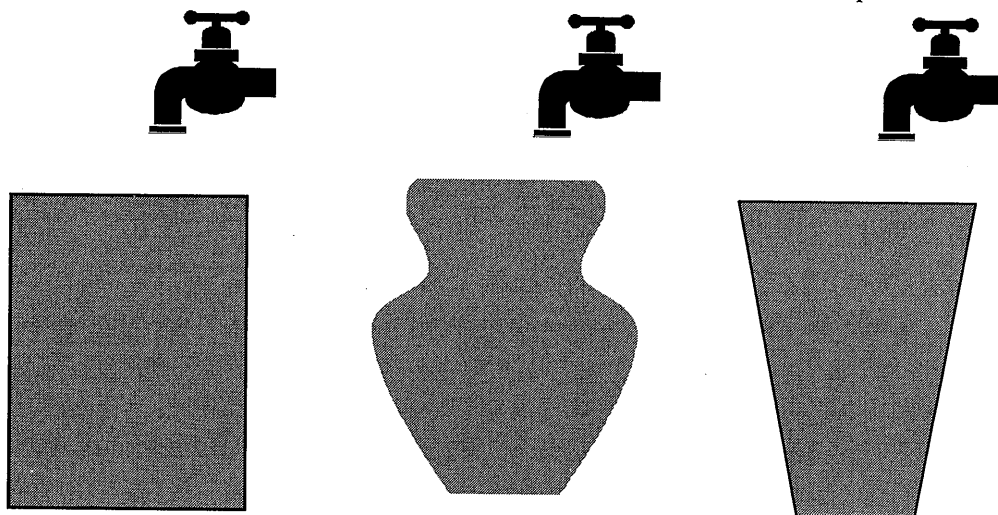


Figure 21: Problème Récipients

## 9.2 Interviews choisies

Quelques extraits des interviews menées en France et en Allemagne sont présentés dans la partie suivante. Ils sont reliés directement à certains points forts ou points faibles identifiés dans les chapitres précédents.

### 9.2.1 Vision iconique

La vision iconique de la représentation graphique des dépendances fonctionnelles a été identifiée dans le chapitre 4 comme raison possible de difficultés lors du travail avec le registre graphique. Les analyses du curriculum potentiel des deux pays n'ont pas pu révéler de problèmes spéciaux visant à éviter ces problèmes. Les premiers extraits d'interviews montrent



que les problèmes liés à la vision iconique apparaissent effectivement dans les interviews en France et en Allemagne.

L'élève allemande avec laquelle la première interview a été réalisée arrive à résoudre rapidement les cinq premiers problèmes posés, et montre qu'elle est capable de travailler de manière réfléchie en mathématiques.

Cette bonne compréhension se montre lors de la résolution du problème *Équation avec fraction*. Elle change la notation de fraction en divisions habituelles et travaille après de manière correcte dans le registre algébrique. (Cette préférence pour une notation sans fractions est un indice d'une difficulté de voir les fractions en tant qu'objets. Les fractions sont vues comme une écriture inhabituelle de divisions (voire Wartha, 2007).

Quand l'intervieweur lui pose une question elle réexplique sa solution d'une autre manière :

Intervieweur Ici... pourquoi tu fais multiplié par  $x$  ?

Élève Parce que le sept ... il est contenu là dedans et parce que ça ,là

I Donc le 56 divisé par  $x$  ?

É Parce que ça donne le nombre par lequel ça doit être divisé, parce que ça devrait être le nombre pour lequel, oui ... sept est le résultat. Et le seul nombre pour lequel le résultat est sept est le huit.

$$\frac{56}{x} = 7$$

$$56 : x = 7$$

$$56 = 7 \times x$$

$$8 = x$$

L'élève comprend donc que le nombre recherché est celui par lequel on doit diviser 56 pour avoir sept comme résultat. Cela est un signe clair d'une compréhension relationnelle et se distingue clairement d'une compréhension instrumentale des travaux dans le registre algébrique (Skemp, 1976). On voit que l'élève est capable de travailler mathématiquement de manière réfléchie.

Le problème *réipients* lui cause cependant des difficultés bien qu'elle comprenne bien le fond du problème.

Tout d'abord elle inscrit sans problèmes une droite croissante et peut bien expliquer son choix :

I Tu peux m'expliquer pourquoi c'est une droite ?

É Parce que le récipient, il reste, c'est une sorte de carré et il reste de la même taille avec toujours le même diamètre et pour celui-là, là il y a une autre forme et ça monte de manière différente. Ça dépend de la forme.

L'intervieweur élargit ensuite la situation de telle manière que le problème ne ressemble plus aux types de problèmes trouvés habituellement dans les livres de classe.

I Tu peux me dire comment la courbe continue quand le récipient est plein ?

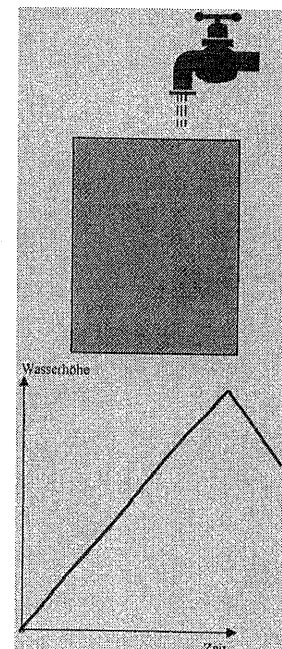
É Oui, ça déborde. C'est fini

I Oui, comment ça pourrait ...

É Oui, ça coule de nouveau vers le bas.

I Tu peux l'inscrire ?

É Comme ça, vers le bas

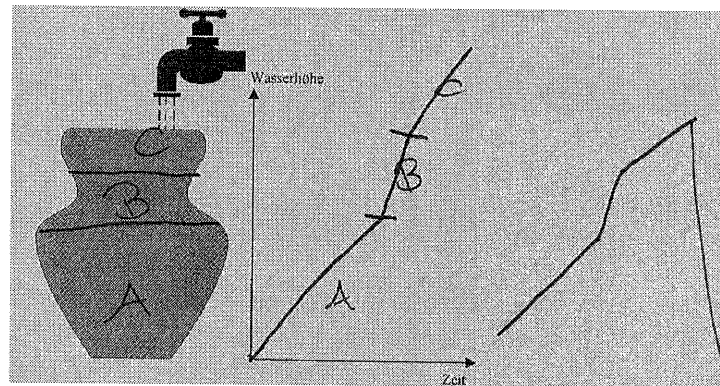


I Et pourquoi ça coule vers le bas ?

É Parce que ça déborde sur le coté et coule comme ça

La question inhabituelle fait adopter une vision iconique à l'élève. La courbe qui a été inscrite de manière complètement correcte auparavant est complétée par l'eau qui descend au bord du récipient.

Le second récipient montre que l'élève peut aussi bien travailler avec des situations plus complexes.



É OK, parce que ça ici ça ... ça devient de plus en plus large, ça devient plus large et là ça devient moins large, là ça monte de nouveau plus rapidement et là ça devient de nouveau plus large et donc ça va monter plus lentement, pas aussi raide.

I Tu peux encore partager le graphique en parties et les marquer sur le graphique et sur le récipient pour qu'on puisse le voir ?

É (numérote le graphique et le récipient) Ça c'est le temps, dans lequel ça monte très rapidement, parce qu'ici ça redevient moins large et ça monte

L'élève partage le graphique en plusieurs droites. Elle ne modélise pas de changement continu de la hauteur de l'eau. La pente de la droite indique dans ce cas si la vitesse du changement de hauteur augmente (droite raide) ou diminue (droite plate) dans la partie du vase étudiée.

I D'accord. Est-ce que c'est une droite ici ? Donc si tu devais l'inscrire de manière très exacte, est-ce que tu utiliserais une règle ?

É Oui, moi j'utiliserai une règle, mais ça va comme ça, puis ça va plus raide et puis ça va de nouveau moins raide. Ce n'est pas une droite qui monte comme ça sans angles.

Pour finir cette partie du problème *Récipients* l'intervieweur repose la question sur ce qui va se passer une fois que le récipient sera plein. L'élève modélise une nouvelle fois l'eau qui descend le long du bord du récipient et inscrit un graphique descendant.

I OK. Qu'est-ce qui se passe quand le récipient est plein ?

É Ben ça redescend en bas.

Pour le troisième récipient l'élève voit d'abord que la vitesse à laquelle l'eau monte diminue avec la hauteur du récipient.

É Je réfléchis maintenant, quand ... un certain ... oui, ça dure ... ça devient un peu plus plat, parce que là c'est moins large et après ça devient de plus en plus large et ça met de plus en plus longtemps

Mais elle inscrit une droite en tant que représentation graphique. Mais la pente de la droite ne représente pas la diminution de la vitesse comme dans le second récipient. Ici elle doit être vue en comparaison avec la pente du premier récipient. L'élève pense que le récipient est un peu plus grand que le premier, et que donc le graphique doit être plus plat.

I Est-ce que c'est une droite ?

É Oui.

I Et quelle est la différence entre le premier et le dernier ?

É Si ils étaient aussi large l'un que l'autre en bas .. ça ça met plus longtemps ici, parce que ça a c'est choses là sur le côté et l'autre monte juste comme ça ... Ca n'a que ça et là, ... là il y a sur le côté, là il y a deux triangles. C'est pour ça que ça dur plus longtemps.

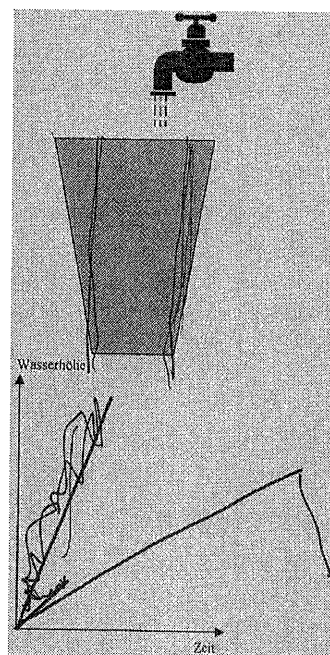
Ici aussi l'élève inscrit une courbe descendante à la fin.

I Très bien. Qu'est-ce qui se passe ici quand c'est plein ?

É Ca déborde aussi.

I OK

É Et après ça descend vers le bas.



Cette interview montre que la vision iconique ne peut pas seulement être retrouvée lors de la lecture ou du travail avec la représentation graphique, mais qu'elle est aussi utilisée par certains élèves lors de l'inscription active d'une courbe.

L'élève de l'extrait vu en haut, trouve la bonne solution à presque tous les problèmes posés et laisse entrevoir qu'elle a toujours bien compris les situations sur lesquelles elle travaille. La vision iconique n'est donc pas un problème apparaissant uniquement chez des élèves qui ont des problèmes pour travailler avec les situations fonctionnelles.

Mis à part la vision iconique qui apparaît quand on lui pose des questions inattendues, l'élève a des déficits concernant la notion de pente et de changement de pente. Pendant la résolution de la seconde partie du problème, la pente doit être vue comme l'augmentation ou la diminution de la vitesse à laquelle l'eau monte. Dans la troisième partie du problème la pente indique le temps relatif nécessaire pour remplir le récipient.

Les deux types de problèmes peuvent être ramenés à des incertitudes avec la Grundvorstellung de covariation. Lors de la vision iconique de la représentation graphique les variables covariantes ne sont pas identifiées. La fausse interprétation de pente peut être vue comme une difficulté d'analyser qualitativement la covariation.

La vision iconique peut aussi être retrouvée dans un extrait d'interview avec une élève française. L'exemple donné vient de la résolution de la première partie du problème *Attribuer les courbes*. L'élève identifie d'abord la solution *Hauteur de chute d'une pierre → Vitesse quand elle touche le sol* comme étant la bonne. Elle donne la raison suivante :

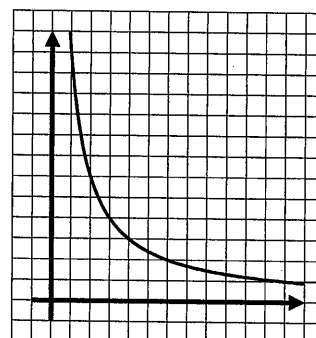
É Parce que, parce que c'est une chute. Donc euh, comme ici, au début c'est élevé et après ça baisse comme la chute.

Plus tard elle revient sur sa décision et la rejette cette fois-ci.

É Non ça peut pas être ça, parce que là ils disent quand elle touche le sol.

I Ouais

É Ici ça touche pas la courbe



I Ah, elle touche pas l'abscisse.

La vision iconique de la représentation graphique a d'abord mené au choix d'une solution fausse. En la regardant plus précisément, l'élève pense que finalement la solution n'est pas juste. Là aussi il utilise une argumentation qui peut être ramené à la vision iconique. La solution est rejetée parce que la pierre ne touche pas le sol, ce qui peut être vu dans le graphique qui ne touche pas l'axe des abscisses.

Il s'agit donc effectivement d'une difficulté existant dans les deux pays.

### 9.2.2 Fixation linéaire

Selon les analyses des curricula souhaités et potentiels l'approche française a comme spécificité de consacrer beaucoup de temps à étudier uniquement les dépendances linéaires. L'hypothèse d'une restriction possible du concept image des élèves a été avancée. Deux extraits d'interviews montrent comment cette restriction affecte le travail avec les dépendances fonctionnelles.

Une élève de 3<sup>e</sup> interviewée en France, trouve les bonnes solutions aux trois premiers problèmes posés. Puis elle essaye d'abord de trouver la solution de la seconde partie du problème *Attribuer les courbes*. Elle voit rapidement qu'il s'agit d'une représentation graphique d'une situation de proportionnalité. Elle peut donc exclure deux des possibles réponses qu'elle identifie tout de suite comme étant des situations non proportionnelles. En faisant ces analyses rapidement, elle montre qu'elle est capable de travailler de manière très sûre avec les situations de proportionnalité.

Des difficultés de compréhension de la réponse *Nombre de travailleurs → Temps de travail nécessaire pour une tâche*, l'empêchent de trouver la bonne solution de ce problème.

La première partie du problème *Attribuer les courbes* est bien plus difficile pour elle.

I Qu'est-ce qui te gêne ? T'aimes pas la courbe ?

É Euh, oui

I Qu'est-ce qui ne va pas ?

É C'est, c'est que la courbe elle, elle coupe pas l'axe des abscisses et des ordonnées.

I Mhm, ..., t'as jamais vu ça ?

É Euh, non je crois pas.

I Mhm [...]

É En tout cas, visiblement c'est quelque chose qui a du baisser.

Elle essaye après de trouver la solution avec l'aide de l'idée que ça doit être une situation dans laquelle une variable baisse en dépendance d'une autre. Elle n'y arrive pas bien parce qu'elle se sent perturbé par l'aspect inhabituel de la courbe.

Après qu'elle ait trouvé très rapidement la bonne solution du problème *Bougie*, les problèmes avec les situations non-linéaires réapparaissent lors du travail avec le problème *Récipients*.

Elle comprend rapidement, que la courbe du premier récipient est une fonction linéaire.

É [...] Pour celui-là, ben en fait je pense que se sera linéaire.

I Mhm [...]

É Comme le vase il est rectangle [...] et que donc, euh, les côtés c'est, ça forme un angle droit.

I Ouais

É Ca veut dire que l'eau [...] quand elle va monter, elle va monter, toujours, euh, à la même vitesse.

Puis elle essaye de tracer la courbe pour le troisième récipient. Elle cherche à y reconnaître une situation linéaire et inscrit une droite passant par l'origine.

I Donc c'est une, c'est une droite un peu plus raide que dans le premier.

É Un peu plus raide parce que, comment dire, c'est toujours proportionnel

I Mhm

É Mais, euh, c'est pas rectangle, donc ça se, il y aura pas. Ah, non. Comment dire, comme, comment dire ... je sais pas en fait

I Qu'est-ce qui te gêne ?

É Ce qui me gêne, en fait c'est, c'est que, euh, comme il a plutôt tendance à être, pas conique mais plus fin en bas

I Mhm

É C'est, comment dire, ..., non je sais pas

I Donc tu cherches comment faire influencer que c'est plus étroit en bas qu'en haut, non ? Enfin comment le montrer dans le, dans la courbe

É Voilà. Euh

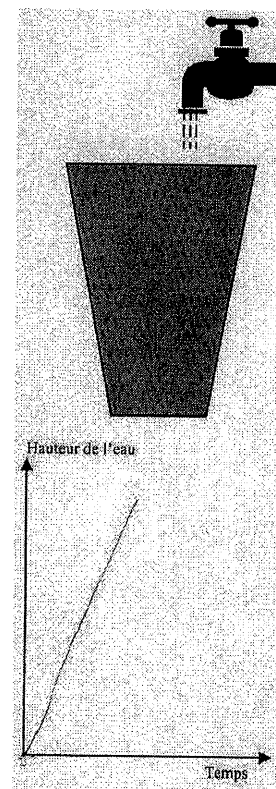
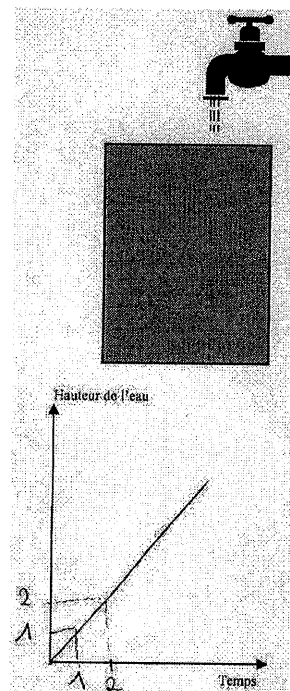
I Donc tu penses que ça devrait se voir dans la courbe ? Que c'est plus fin en bas qu'en haut.

É Non, non.

I Non ?

É Euh, en fait je sais plus, non je sais pas

L'élève essaye de reconnaître une situation de proportionnalité tout en voyant que le récipient devient plus large vers le haut. Elle donne l'impression de vouloir faire influencer cela sur l'aspect de la courbe sans, pour autant, savoir comment le faire.



Ensuite elle essaye d'expliquer ses difficultés avec l'aide du récipient du milieu. Mais là aussi elle n'a pas les moyens d'exprimer dans le registre graphique ce qu'elle paraît comprendre intuitivement.

É Celui du milieu, au bout d'un moment comme là c'est creux.

I Mhm

É Comme c'est creux, comment ça s'appelle, euh, la hauteur, non, il va avoir un changement.

I Ca veut dire ?

É Euh, je crois que la, la droite elle sera pas complètement, euh.

I Tu peux inscrire ce que tu penses ?

É Je, je sais pas comment elle va être, mais comme, euh, le, pas le volume, mais l'espace.

I Mhm

É Il est pas pareil.

I Oui, la place, enfin la largeur du, récipient, oui.

É Eh ben je crois que ça sera pas, euh, que ça sera pas de la même hauteur. Non

I Ca sera pas de la... Qu'est-ce qui va changer ?

É Je crois que c'est la, en fait c'est rien qui va changer.

I Mhm ?

É Je crois que c'est rien qui va changer.

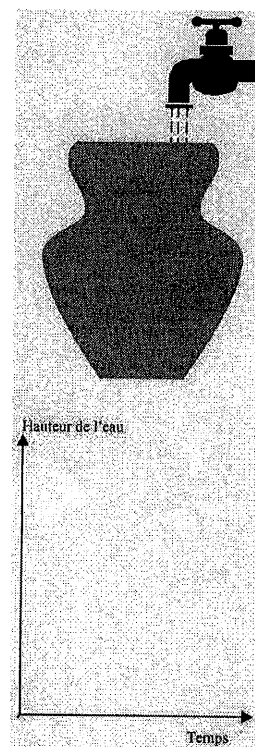
L'élève n'arrive pas à exprimer sa bonne compréhension de la situation dans le registre graphique. Au début elle paraît essayer d'expliquer l'influence de la forme du récipient sur la vitesse à laquelle l'eau monte. Mais elle n'a pas les moyens pour exprimer cette influence dans le registre graphique et elle doit arrêter ses explications.

Cette interview montre que la fixation linéaire, qui avait été attendue après l'analyse des curricula souhaité et potentiel, peut effectivement être constatée auprès des élèves de 3<sup>e</sup>. L'élève de cet extrait n'a pas les moyens d'exprimer la situation fonctionnelle de manière adéquate dans le registre graphique, malgré ses impressions contradictoires et sa bonne compréhension de la situation.

Les manuels français traitent seulement des situations de proportionnalité et linéaires de manière approfondie jusqu'en 3<sup>e</sup>. Les situations de proportionnalité doivent être identifiées parmi d'autres situations. Les situations identifiées comme étant non-proportionnelles ne sont pas étudiées plus en détail. Un concept image très restreint peut donc être à l'origine des difficultés de cette élève. Ce concept image ne contient pas de dépendances non-linéaires et ne permet pas d'autres représentations graphiques de dépendances fonctionnelles que des droites.

Cette difficulté d'accepter d'autres représentations graphiques que des droites peuvent aussi être vues lors du travail avec la première partie du problème *Attribuer les courbes*. L'aspect inhabituel de la courbe perturbe l'élève et l'empêche de résoudre le problème correctement. Les situations de proportionnalité et linéaires par contre ne lui posent aucun problème.

D'autres interviews menées en France montrent aussi des restrictions similaires des concepts images sur des fonctions linéaires. Une autre élève a des difficultés avec le problème *Récipients* et le problème *Attribuer les courbes*, parce qu'elle ne sait pas comment travailler avec ce genre de situations fonctionnelles. Elle exprime ses pensées lors qu'elle voit la courbe du problème *Attribuer les courbes* qui n'est pas une droite.

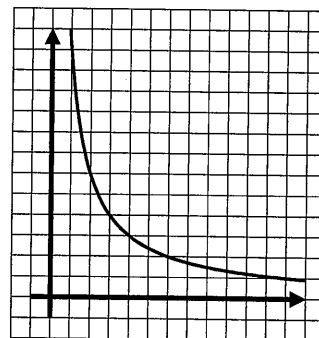


É Mhm. J'ai jamais vu une courbe comme ça.

I Pourquoi ? Qu'est-ce qui te gêne ?

É Parce que d'habitude les courbes, elle, euh, elles sont droites, enfin, ou sinon elles sont, enfin, et elles passent, enfin elles passent par l'origine, alors que là elle est plutôt, elle est, euh, elle rebondit.

L'élève montre que ce genre de courbe est complètement nouveau pour elle et lui pose des difficultés considérables.



### 9.2.3 Grundvorstellung de covariation

Dans une autre interview avec une élève de 3<sup>e</sup> on peut constater une préférence pour l'utilisation de la Grundvorstellung de covariation. Cette préférence est accompagnée ici par des difficultés avec le registre algébrique.

L'élève a des difficultés lors de la résolution des deux premiers problèmes. Elle trouve les bonnes solutions en essayant différents nombres et montre qu'elle est très peu sûre quand elle travaille à l'intérieur du registre algébrique. Ces difficultés se montrent aussi avec le problème *Bougie*. Comme elle ne peut pas donner de formule générale et qu'elle dit vouloir faire les calculs avec l'aide du produit en croix, l'intervieweur lui demande de calculer la hauteur de la bougie après dix minutes.

L'extrait d'interview suivant montre comment une bonne utilisation de Grundvorstellungen peut aider à surmonter des déficits présents dans d'autres domaines. Dans le cas présenté, une élève française arrive à surmonter les déficits qu'elle a concernant les relations non linéaires en utilisant la Grundvorstellung de covariation.

É Ben je fais le produit en croix. Je fais 10 minutes.

I Vas-y, vas-y, fais le. ... (15 secondes) ... Ca fait combien ?

É Mhm, quand on multiplie on décale ou on retire ?

I On retire. [...] Mais en calculant ça on aura la hauteur de la bougie ?

É Ca fait 1.

I D'accord.

Handwritten notes and calculations:

1 min  $\longleftrightarrow$  0,1 cm

10 min

$$\frac{10 \times 0,1}{1} = 1$$

Elle ne comprend pas ce qu'elle calcule et utilise le produit en croix comme une formule qui donne la solution. Cette utilisation d'automatismes pour trouver la solution avait été attendue après l'analyse du curriculum potentiel. Les livres de classe analysés conduisent les élèves à l'apprentissage de certaines méthodes de résolution typiques pour des groupes de problèmes spécifiques. Quand les élèves travaillent un problème ils doivent d'abord identifier le groupe auquel ce problème appartient pour après trouver la solution avec les automatismes appris (voire chapitre 7).

Quand l'élève essaye de calculer le résultat du produit en croix elle montre aussi qu'elle a des difficultés avec la multiplication de nombres décimaux simples.

L'élève n'arrive pas à comprendre la situation fonctionnelle dans son ensemble et d'en donner une représentation algébrique. Elle montre que son concept de fonction lors qu'elle travaille

avec le registre algébrique est un concept d'action (Dubinsky & Harel, 1992). Elle voit les fonctions comme une suite de calculs sans distinguer l'ensemble.

L'élève montre bien plus de sûreté quand elle travaille avec des dépendances fonctionnelles dans le registre graphique. Elle trouve la bonne solution du problème *Luge* en analysant les changements de vitesse du conducteur de la luge. Quand elle explique sa solution elle utilise les mêmes mots pour le conducteur de la luge et pour la courbe. Elle décrit par exemple la première courbe de la manière suivante :

É [...] La courbe] accélère, mais là elle ralentit. Alors que là [le conducteur de la luge] accélère, et il est euh, constant et après il reaccélère.

Elle regarde le développement de la courbe à différents moments et étudie sa variation. Par contre elle ne regarde pas la courbe de manière point par point.

La Grundvorstellung de covariation lui sert également pour trouver la bonne solution du problème *Attribuer les courbes*. Elle fait d'abord la seconde partie de ce problème et constate que c'est une courbe croissante. Cela lui permet d'exclure trois des situations fausses en analysant la variation et de justifier sa décision.

Elle exclut *Durée de communications* → *Prix avec abonnement* après avoir décidé dans une discussion avec l'intervieweur qu'il s'agissait d'une situation avec un tarif forfaitaire :

I La courbe elle ressemblerait à ça ?

É Non, elle serait constante

Puis elle exclut *Age d'un homme* → *Taille de celui-ci* pour la raison suivante :

É Mais ça aussi c'est pas le bon choix.

I Pourquoi ?

É Parce qu'il y a, à partir d'un âge on grandit plus.

I D'accord, donc la courbe ferait quoi ?

É Elle augmenterait et après elle serait constante.

La troisième situation (*Nombre de travailleurs* → *Temps de travail nécessaire pour une tâche*) est également exclue avec l'aide d'un raisonnement de variation.

É Le nombre de travailleurs là, temps de travail nécessaire pour une tâche. [...] Ben non. Ben non, puisque normalement si, plus, plus il a de travailleurs, plus le temps il diminue.

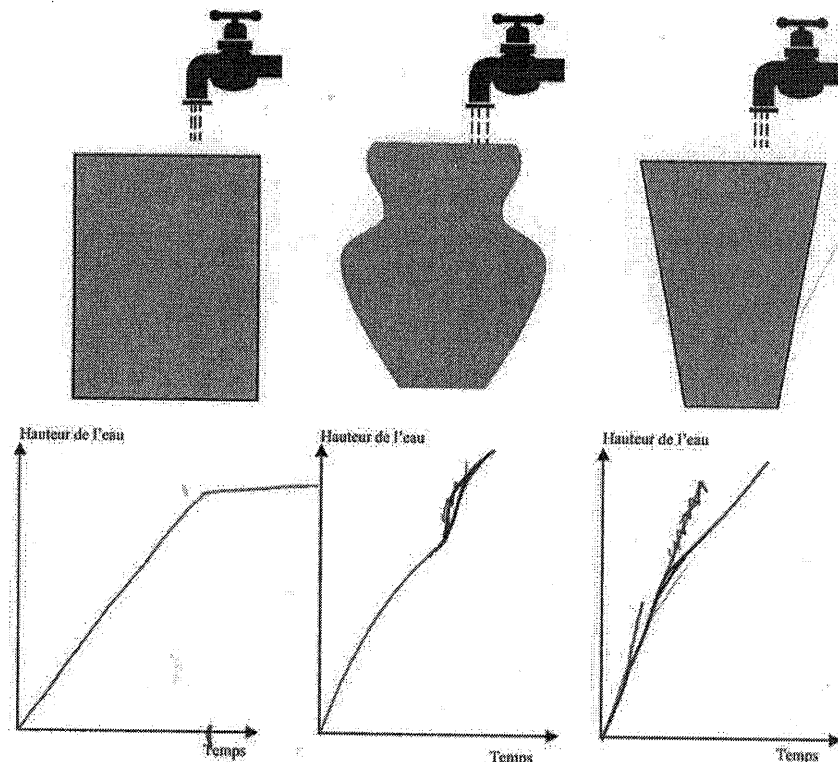
Finalement elle trouve la bonne solution (*Poids de la viande* → *Prix*) et elle le justifie aussi par la variation :

É Parce que le prix, le poids il augmente plus le prix il augmente aussi.

L'élève a bien plus de difficultés à trouver la bonne solution de la première partie du problème *Attribuer les courbes*, entre autres parce qu'elle est irritée par l'aspect inhabituel de la courbe qui n'est pas une droite.



Bien qu'elle ait des difficultés avec la représentation graphique des dépendances fonctionnelles non-linéaires, elle arrive à trouver la bonne solution du problème *Récipients* en utilisant sa Grundvorstellung de covariation bien développée.



Quand elle arrive au problème des récipients elle inscrit une droite pour le premier récipient et constate :

É Ben, elle augmente normalement.

Elle répond rapidement et de manière correcte à la question concernant la suite de la courbe après le remplissage total du récipient :

É Ben, elle reste pareille.

Quand elle veut tracer la courbe du troisième récipient elle constate immédiatement que la courbe doit être plus raide car le récipient est moins large en bas. Ensuite elle trace une droite assez raide. La largeur changeante du récipient la perturbe cependant. En réfléchissant, elle constate que la rapidité à laquelle l'eau monte doit diminuer. D'abord elle trace deux droites reliées par un angle. Après une question de l'intervieweur qui veut savoir comment comprendre cet angle, elle répond :

É Non ça tourne [...] tout le temps.

I D'accord. Très bien.

É Parce que le vase il est tout le temps comme ça. Donc ça tourne tout le temps.

Puis, elle trace correctement la courbe du récipient du milieu en utilisant les idées qu'elle vient de développer.

Cette élève montre dans les problèmes *Luge* et *Attribuer les courbes* qu'elle a développé une bonne Grundvorstellung de covariation. Comme l'élève du second extrait, elle n'a pas l'habitude de travailler sur des situations non linéaires et ces relations n'occupent pas une grande place dans son concept image. Mais elle a donc pu combler ce déficit de concept image par une bonne Grundvorstellung de covariation. En peu de temps elle comprend la situation fonctionnelle et elle arrive à tracer correctement la représentation graphique. D'autres élèves, comme celle citée plus haut, n'ont pas pu franchir ce pas. Des Grundvorstellungen bien développées permettent donc aux élèves de comprendre seuls des nouveaux types de problèmes.

Cet extrait montre, mis à part de l'importance d'une bonne Grundvorstellung de covariation, que les élèves peuvent développer dans certains cas des points forts spécifiques tout en ayant de grandes difficultés dans certains domaines. L'élève de cet extrait peut bien résoudre des problèmes dans le registre graphique avec l'aide de la Grundvorstellung de covariation. Le problème *Bougie* qui utilise le registre algébrique et la Grundvorstellung d'association montre rapidement les limites de ce qu'elle est capable de faire.

#### 9.2.4 Causalité

Le dernier extrait d'interview illustre le problème suivant: certains élèves s'attendent à avoir la possibilité de faire des prévisions lors de l'utilisation de dépendances fonctionnelles. Cette difficulté peut avoir son origine dans l'utilisation des mots *dépendance* et *Abhängigkeit*. Certains élèves refusent par exemple de voir une dépendance fonctionnelle dans le cours d'une action tracé en fonction du temps, car le cours d'une action n'est pas prévisible.

Cet extrait d'interview réalisée avec un élève de 3<sup>e</sup>, illustre ce problème. Il a des difficultés avec la plupart des problèmes posés dans l'interview et refuse d'associer la relation *Age d'un homme* → *Taille de celui-ci* à la courbe représentant une fonction linéaire.

É [...] La taille d'un homme varie en fonction des individus. Alors on peut pas savoir. Par exemple, il y a un homme, il peut être grand à, à 15 ans, alors qu'un autre à 15 ans il est plus petit.

I [...] Pourquoi ça peut, pourquoi ça peut pas aller avec un homme ?

É Parce que la taille, elle varie. C'est pas la même par, des, par rapport à deux hommes.

L'élève refuse ce choix parce que la courbe ne peut pas être valable pour toutes les personnes. Cela indique déjà la causalité que l'élève attend implicitement.

Comme l'intervieweur remarque qu'il pourrait aussi s'agir du graphique pour une personne précise, l'élève tente d'expliquer plus clairement ses idées :

I Oui mais ça c'est la courbe d'un homme. [...] Par exemple le mien [...] Ca peut être possible ou pas ?

É [...] Ben non. Comme, on sait, on sait pas comment il va grandir l'homme. [...] On sait pas s'il va être grand. Dès la naissance on sait pas s'il va être grand ou petit.

I D'accord, donc ce qui te gêne c'est

É que c'est, c'est, que enfin, par exemple à cet âge là, ici

I Ouais

É Ici on peut pas dire que ici on sera à cette hauteur là, qu'on fera cette taille là

I D'accord. Donc parce que c'est pas prévisible.

É Voilà

La taille d'une personne à un certain âge ne peut pas être prédite par une formule. L'élève n'accepte pas cette relation arbitraire, qui n'est pas prévisible. Le développement historique retracé dans le second chapitre a montré qu'il s'agit d'un obstacle épistémologique connu. Il est aussi important de remarquer que les mots *dépendance* et *Abhängigkeit* peuvent impliquer dans les deux langues une certaine causalité, qui peut être une des origines de cette difficulté.

Cet extrait d'interview montre que la restriction du concept image des fonctions, qui ne permet pas de dépendances arbitraires, peut aussi mener à des difficultés quand il s'agit de dépendances fonctionnelles usuelles.

### 9.3 Résultats de ce chapitre

Plusieurs phénomènes ont pu être exemplifiés dans ce chapitre : des difficultés connues par la recherche internationale, des restrictions des concepts images et aussi les effets positifs de Grundvorstellungen bien développées.

Il a été démontré de manière exemplaire, qu'une base large de types de fonctions connues, ainsi que l'utilisation active des Grundvorstellungen de covariation et d'association, ont une grande importance pour pouvoir comprendre et utiliser des situations fonctionnelles dans la vie quotidienne. La pensée fonctionnelle est seulement développée de manière suffisante quand il n'y a plus de restriction massive du concept image comme dans l'extrait d'interview concernant la fixation linéaire. Les deux Grundvorstellungen nommées plus haut doivent être utilisables pour comprendre seul des nouvelles situations. Certaines fautes typiques (comme celles du premier et du dernier extrait) peuvent être évitées en utilisant souvent des situations fonctionnelles variées.

Les problèmes posés dans les interviews montrent aussi la variété de situations qui requièrent la pensée fonctionnelle. Plus un élève a su développer la pensée fonctionnelle, plus il sera capable de traiter un nombre croissant de situations du champ conceptuel concernant la pensée fonctionnelle.

Plusieurs réponses à des questions posées dans les chapitres précédents ont pu être trouvées. Les difficultés repérées ont été reliées à des déficits du concept image et spécialement à des difficultés avec certaines Grundvorstellungen. Certains problèmes, comme la vision iconique de la représentation graphique, peuvent être retrouvés dans les deux pays, tandis que d'autres sont ramenés à des particularités des curricula.

Quelques propositions de changements des différents curricula, qui se sont développées à partir des analyses de ce travail, sont données dans le chapitre suivant.

## 10 Propositions de changements et perspectives

Plusieurs propositions de changements des curricula de France et d'Allemagne sont faites dans ce chapitre. Les perspectives ouvertes par ce travail et de nouvelles questions de recherche, closent ce travail.

### 10.1 Propositions de changements

Ce travail a permis de développer une série de points qui peuvent mener à des difficultés sur le chemin du développement de la pensée fonctionnelle. Il est possible d'en déduire des propositions de changements des curricula respectifs pour que les difficultés n'apparaissent plus ou seulement de manière atténuée.

Les propositions sont présentées de manière raccourcie dans la liste suivante

#### Propositions concernant les deux pays :

- Utilisation d'un plus grand nombre de problèmes qui préparent à des difficultés connues, comme la vision iconique de la représentation graphique.
- Introduction de la notion de fonction en tant que notion réunissant les relations fonctionnelles étudiées jusque là. Une introduction au début du travail avec les fonctions peut engendrer des problèmes.

#### Propositions concernant l'Allemagne – la Bavière

##### Hauptschule:

- Etude de plus de types de fonctions, même si ceux-ci ne sont pas vus en détail
- Utilisation de la représentation algébrique avant la dixième (2<sup>de</sup>)
- Introduction de la notion de fonction en neuvième (3<sup>e</sup>)

##### Realschule:

- Arrêt de l'utilisation de l'approche par la théorie des ensembles
- Utilisation plus intensive de situations réelles
- Utilisation renforcée de la Grundvorstellung de covariation et analyse de variations
- Dans les branches non-mathématiques: travail sur plus de types de fonctions

##### Gymnasium:

- Introduction de la notion de fonction de manière moins compacte pour permettre un développement plus harmonieux du concept image et du concept definition

#### France

- Avancement de l'étude des fonctions non linéaires

- Utilisation plus intensive de situations réelles dans les classes élevées
- Étude qualitative de la nature de la variation des dépendances fonctionnelles et pas seulement de la direction de la variation

Certaines de ces propositions ont déjà été prises en compte dans les nouveaux programmes, mais la plupart n'ont pas encore été mises en pratique. Du point de vue de ce travail, il y a donc encore plusieurs mesures à prendre pour soutenir de manière optimale les élèves dans leur développement de la pensée fonctionnelle-

## 10.2 Perspectives

Ce travail précise le cadre théorique de la pensée fonctionnelle et il compare la possibilité de son développement pour les élèves du CM2 à la 2<sup>de</sup> en France et en Allemagne. Certaines questions restent pourtant ouvertes, n'ayant pas pu être approfondies ou (s'étant) posées au cours de cette thèse. Ces questions sont résumées dans cette section. De plus, il est démontré comment la base de données concernant d'éventuels changements des curricula souhaité et potentiel peut être améliorée en faisant d'autres études quantitatives et qualitatives, ainsi que des interventions dans des salles de classes.

L'analyse faite dans ce travail des curricula des deux pays, inclut le curriculum souhaité, le curriculum potentiel et, avec certaines restrictions, le curriculum atteint. Les observations des cours concernant les fonctions n'ont pas été retenues. Elles peuvent cependant montrer, comment les spécificités des programmes de chaque pays sont mises en pratique par les professeurs et comment les élèves les acceptent. Il est par exemple possible d'avoir plus d'informations sur le rôle des relations à la Realschule bavaroise ainsi que sur les exemples de situations non linéaires donnés jusqu'en 3<sup>e</sup> dans les classes françaises. Pour arriver à de bons résultats, il est nécessaire de faire des observations dans un grand nombre de classes.

Il est aussi possible d'analyser plus en détail le rôle de la définition de la notion de fonction lors des observations de classes. La définition de pensée fonctionnelle n'accorde pas de grande importance à l'utilisation active de la définition de la notion de fonction. C'est pour cela que le concept definition ne fait pas partie des objectifs de recherche centraux de ce travail. L'analyse des concepts definitions paraît plus importante, après la constatation que les élèves français et allemands ont des concepts images restreints. Plusieurs travaux de recherche ont montré que des conflits entre le concept image et le concept definition peuvent être à l'origine de certaines difficultés des élèves. Il est aussi intéressant de décrire en détail le développement du concept definition après la 2<sup>de</sup>, puisque dans certaines écoles la notion de fonction n'est utilisée que vers la fin de la période étudiée. Dans ce cadre on peut aussi répondre à la question de savoir si les difficultés qui existent entre le concept image et le concept definition, causées par une définition de la notion de fonction avant un travail approfondi sur plusieurs types d'entre elles, peuvent être identifiées et précisées.

La question concernant les conséquences en France de la définition de la notion de fonction en tant qu'association, et l'utilisation par la suite quasiment exclusive de l'aspect de variation reste également ouverte. Est-t-il possible d'identifier des restrictions des concepts images et

des concepts définitions ? Cela dépend aussi de l'utilisation de la Grundvorstellung de covariation et de celle d'association après la 2<sup>de</sup>.

Le développement de l'étude des variations après la 2<sup>de</sup> est également un point très intéressant. Si l'analyse qualitative des variations continue à ne pas être faite et si les accroissements des différents types de fonctions ne sont pas comparés par les élèves, on peut s'attendre à des conséquences sur les concepts images et sur les possibilités d'applications de la Grundvorstellung de covariation.

Des analyses détaillées de la Grundvorstellung de covariation dans la Realschule peuvent également donner des résultats intéressants. Il peut être par exemple intéressant d'essayer de constater, avec l'aide d'interviews, dans quelle mesure des déficits dans le domaine de la Grundvorstellung de covariation ont des conséquences sur le travail avec certains problèmes et si les élèves sont capables de développer seuls cette Grundvorstellung.

Un des résultats de l'analyse du curriculum potentiel est que les deux pays s'orientent sur la représentation algébrique pour développer l'enseignement des fonctions. La question peut donc être posée de savoir si cette orientation sur la représentation algébrique n'a pas de conséquences sur les concepts images des élèves. Cette question est intéressante parce que, dans leur vie quotidienne, les élèves sont confrontés avec des situations fonctionnelles qui n'ont pas de représentations algébriques simples. Une restriction de la pensée fonctionnelle peut donc entraîner des difficultés concernant le traitement de ces situations.

Les analyses des curricula potentiel et souhaité montrent que très peu de types de fonctions sont utilisés en France jusqu'en 3<sup>e</sup> et dans la Hauptschule bavaroise. Cela restreint probablement la capacité de développer la pensée fonctionnelle. Il faudrait éventuellement essayer d'introduire de manière expérimentale plus de types de fonctions dans quelques classes de la Hauptschule bavaroise afin de vérifier si une telle anticipation est possible.

# Bibliographie

## Articles

- [1] Amra, N. (2003). La transposition didactique du concept de fonction: Comparaison entre les systèmes d'enseignement français et palestinien. Paris: Université Paris 7 – Denis Diderot.
- [2] Andelfinger, B. (1985). Didaktischer Informationsdienst Mathematik – Thema: Arithmetik, Algebra und Funktionen; In Landesinstitut für Schule und Weiterbildung (Hrsg.), *Curriculum Heft 44* (S. 21-82, S. 125-126, S. 204-231). Soest.
- [3] Angoff, W. H. (1993). Perspectives on differential item functioning methodology. In P. H. Holland, & H. Wainer (Hrsg.), *Differential item functioning* (S. 3-23). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- [4] Artigue, M. (1992). Functions from an algebraic and graphic point of view: cognitive difficulties and teaching practices. *The Concept of Function, MAA Notes*, 25, 108-132.
- [5] Artigue, M. (1996). Réformes et contre-réformes dans l'enseignement de l'analyse au lycée (1902-1994). In B. Belhoste, H. Gispert, & N. Hulin (Hrsg.), *Les sciences au lycée. Un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France* (pp. 197-217). Paris: Vuibert, INRP.
- [6] Baumert, J., Bos, W., & Lehman, R. (Hrsg.). (2000). TIMSS III – Dritte Internationale Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie. Band 1 und 2. Opladen: Leske + Budrich.
- [7] Belhoste, B. (1995). Les Sciences dans l'enseignement secondaire français, textes officiels (1789-1914). Paris: INRP et Economica.
- [8] Bloch, I. (2003). Teaching functions in a graphic milieu: What forms of knowledge enable students to conjecture and prove? *Educational studies in mathematics*, 52, 3-28.
- [9] Blum, W. (2002). On the role of "Grundvorstellungen" for reality-related proofs - examples and reflections. In M. A. Mariotti (Ed.), *CERME-3 – Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. Università di Pisa.
- [10] Blum, W., Neubrand, M., Ehmke, T., Senkbeil, M., Jordan, A., Ulfig, F., & Carstensen, C. H. (2004). Mathematische Kompetenz. In M. Prenzel, J. Baumert, W. Blum, R. Lehmann, D. Leutner, M. Neubrand, R. Pekrun, J. Rost, & U. Schiefele (Hrsg.), *PISA 2003. Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland – Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs* (S. 47-93). Münster: Waxmann.
- [11] Bourny, G., Fumel, S., Monnier, A.-L., & Rocher, T. (2004). Les élèves de 15 ans – Premiers résultats de l'évaluation internationale PISA 2003. *Note d'évaluation n° 04-12, décembre 2004*. Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, DEP.
- [12] Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 247-285.

- [13] Buck, R. (1970). Functions. In E.G. Begle (Hrsg.), *The sixty-ninth yearbook of the National Society for the Study of Education, Part I: Mathematics Education* (pp. 236-259). Chicago, Illinois: The University of Chicago Press.
- [14] Cha, I. (1999). Mathematical and Pedagogical Discussions of the Function Concept. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education*, 3(1), 35-56.
- [15] Chauvat, G. (1998). Courbes et fonctions au collège. *Petit x*, 51, 23-44.
- [16] Confrey, J., & Smith, E. (1991). A framework for functions: prototype, multiple representations, and transformations; In R. Underhill, & C. Brown (Hrsg.), *Proceedings of the 13th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 57-63). Blacksburg Virginia.
- [17] Coppé, S., Dorier, J.-L., & Yavuz, I. (2006). Eléments d'analyse sur le programme de 2000 concernant l'enseignement des fonctions en seconde. *Petit x*, 71, 29-60.
- [18] Draba, R.E. (1977). The Identification and Interpretation of Item Bias. *Research Memorandum No. 26*. Chicago: Statistical Laboratory, Department of Education, University of Chicago.
- [19] Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1983). The function concept in college students: linearity, smoothness and periodicity. *Focus on learning problems in mathematics*, 5(3) & 5(4), 119-132.
- [20] Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1990). On difficulties with diagrams: Theoretical issues. In G. Booker, P. Cobb, & T.N. de Mendicuti (Hrsg.), *Proceedings of the 14th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (1, pp. 27-33). Oaxtepec, Mexico.
- [21] Dubinsky, E., & Harel, G. (1992). The Nature of the Process Concept of Function – The Case of Function. *The Concept of Function, MAA Notes*, 25, 85-106.
- [22] Dugdale, S. (1993). Functions and graphs – Perspectives on student thinking. In: T. Romberg, E. Fennema, & T. Carpenter (Hrsg.), *Integrating research on the graphical representation of functions* (S. 101-130). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- [23] Dupé, C., & Olivier, Y. (2005). Ce que l'évaluation PISA 2003 peut nous apprendre. *Bulletin de l'APMEP*, n° 460, septembre, octobre 2005, 626-644.
- [24] Duval, R. (1988a). Ecarts sémantiques et cohérence mathématique: Introduction aux problèmes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1, 7-25.
- [25] Duval, R. (1988b). Graphiques et equations: L'articulation de deux registres. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1, 235-253.
- [26] Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.
- [27] Duval, R. (1996). «Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ? ». *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 16(3), 349-382.



- [28] Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, 61, 103-131.
- [29] Eisenberg, T. (1992). On the development of a sense for functions. *The Concept of Function, MAA Notes*, 25, 153-174.
- [30] Eisenberg, T., & Dreyfus, T. (1986). On visual versus analytical thinking in Mathematics. Proceedings of the 10<sup>th</sup> conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (S. 153-158). London.
- [31] Even, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational studies in mathematics*, 21, 521-544.
- [32] Even, R. (1993). Subject-matter knowledge: Prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for research for research in mathematics education*, 2, 94-116.
- [33] Even, R. (1998). Factors Involved in Linking Representations of Functions. *Journal of Mathematical Behavior*, 17 (1), 105-121.
- [34] Fimmel, E. (2000). Eine empirische Untersuchung zum Verständnis des Funktionsbegriffs bei Schülern in Deutschland und Russland. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2000*, 189-192.
- [35] Führer, L. (1995). Rezension zu Müller-Phillipp, S.: Der Funktionsbegriff im Mathematikunterricht. Eine Analyse für die Sekundarstufe I unter Berücksichtigung lernpsychologischer Erkenntnisse und der Einbeziehung des Computers als Lernhilfe. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 27(4), 127-129.
- [36] Furinghetti, F., & Somaglia, A. (1994). Functions in algebraic and graphical environments; In A. Antibì (Hrsg.), *Actes de la 46<sup>e</sup> rencontre CIEAEM* (S. 248-255). Toulouse.
- [37] Gagatsis, A. (2000). Processi di traduzione ed il concetto di funzione. *Quaderni di Ricerca in Didattica. G.R.I.M, University of Palermo, Italia*, 1-24.
- [38] Gagatsis, A., & Shiakalli, M. (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology*, 24 (5), 645-657.
- [39] Goldenberg, P. (1987). Believing is seeing: How preconceptions influence the perception of graphs. *Psychology of Mathematics Education – PME XI Proceedings of the eleventh international conference* (1, pp. 197-203). Montreal.
- [40] Groupe « Lycée » - Irem de Clermond-Fd (1993). Introduction de la notion de fonction en seconde de lycée. *Repères – IREM*, 10, 47-57.
- [41] Grugnetti, L., Maffini, A., & Marchini, C. (2001). Le concept de fonction dans l'école italienne; Usage de l'épistémologie et de l'histoire des mathématiques pour en clarifier le sens; In P. Radelet-de Grave (Hrsg.), *Histoire et épistémologie dans l'éducation mathématique «De la maternelle à l'université»*; *Actes de L'Univ.d'été 99; Épistémologie et Histoire des Mathématiques* (1, pp. 421 – 443).
- [42] Hausdorff, F. (1914) (Reprint 1965). *Grundzüge der Mengenlehre*. New York: Chelsea Publishing Company.

- [43] Hischer, H. (2002). (2007, 14. Juni). Zur Geschichte des Funktionsbegriffs.  
<http://www.hischer.de/uds/forsch/preprints/hischer/Preprint54.pdf>.
- [44] Hofe, R. vom (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg, Berlin, Oxford: Spektrum Akademischer Verlag GmbH.
- [45] Hofe, R. vom, Kleine, M., Wartha, S., Blum, W., Jordan, A., & Pekrun, R. (2004). How can the Development of "Mathematical Literacy" be measured and what Implications for Improving Class-room Practice can be expected? - First Results from the Longitudinal Research Programme PALMA (Project for the Analysis of Learning and Achievement in Mathematics). *Paper presented at ICME (International Conference for Mathematics Education) Copenhagen*.
- [46] Hofe, R. vom, Kleine, M., Blum, W., & Pekrun, R. (2005a). Zur Entwicklung mathematischer Grundbildung in der Sekundarstufe I – theoretische, empirische und diagnostische Aspekte. In M. Hasselhorn, H. Marx & W. Schneider (Hrsg.), *Jahrbuch für pädagogisch-psychologische Diagnostik. Test und Trends, Band 4* (S. 263-292). Göttingen: Hogrefe.
- [47] Hofe, R. vom, Kleine, M., Wartha, S., Blum, W., & Pekrun, R. (2005b). On the role of „Grundvorstellungen“ for the development of mathematical literacy – First results of the longitudinal Study PALMA. *Mediterranean Journal for the research in Mathematics Education, Vol. 4 (2)*, 67-84.
- [48] Hofe, R. vom, Kleine, M., Wartha, S., Blum, W., & Pekrun, R. (2005). On the role of „Grundvorstellungen“ for the development of mathematical literacy – First results of the longitudinal Study PALMA. *Mediterranean Journal for the research in Mathematics Education, 4(2)*, 67-84.
- [49] Hofe, R. vom, Pekrun, R., Kleine, M., & Götz, T. (2002). Projekt zur Analyse der Leistungsentwicklung in Mathematik (PALMA): Konstruktion des Regensburger Mathematikleistungstests für 5.-10. Klassen. In M. Prenzel, & J. Doll (Hrsg.), *Bildungsqualität von Schule: Schulische und außerschulische Bedingungen mathematischer, naturwissenschaftlicher und überfachlicher Kompetenzen* (Zeitschrift für Pädagogik, 45. Beiheft, S. 83-100. Weinheim: Beltz.
- [50] Ingrao, B. (1991). La notion de fonction à travers l'histoire. *Bulletin IREM de Clermont-Ferrand, 43-44*, 57-81.
- [51] Janvier, C. (1983a). Teaching the concept of function. *Mathematical Education for Teaching, 4*, 48-60.
- [52] Janvier, C. (1983b). Représentation et compréhension. Un exemple : Le concept de fonction. *Bulletin de l'association mathématique du Québec, 3*, 22-28.
- [53] Janvier, C. (1987a). Translation processes in mathematics education. In C. Janvier (Hrsg.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 27-32). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- [54] Janvier, C. (1987b). Representation and understanding: The notion of function as example. In C. Janvier (Hrsg.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 67-71). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

- [55] Janvier, C. (1998). The notion of chronicle as an epistemological obstacle to the concept of function. *Journal of mathematical behavior*, 17(1), 79-103.
- [56] Kalchman, M., & Case, R. (1998). Teaching mathematical functions in primary and middle school: An approach based on neo-Piagetian theory. *Scientia Paedagogica Experimentalis*, 35(1), 7-54.
- [57] Kaput, J. (1987a). Representation systems and mathematics; In C. Janvier (Hrsg.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 19-26). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- [58] Kaput, J. (1987b). Towards a theory of symbol use in mathematics; In C. Janvier (Hrsg.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp.159-195). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- [59] Kaput, J. (1989). Linking representations in the symbol systems of algebra. In S. Wagner, & C. Kieran (Hrsg.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 167-194). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- [60] Kaput, J. (1993). The urgent need for proleptic research in the representation of quantitative relationships. In T. Romberg, E. Fennema, & T. Carpenter (Hrsg.), *Integrating research on the graphical representation of functions* (pp. 279-312). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- [61] Kaune, C. (1995). Der Funktionsbegriff als ein Fundament für den gymnasialen Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. In H.-G. Steiner, H.-J. Vollrath (Hrsg.), *Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld; Untersuchungen zum Mathematikunterricht – Neue problem- und praxisbezogene Forschungsansätze* (20, S. 66-76). Köln: Aulis Verlag Deubner & Co KG.
- [62] Keeves, J. P., & Masters G. N. (1999). Introduction. In G. N. Masters, & J. P. Keeves, (Hrsg.), *Advances in Measurement in Educational Research and Assessment* (S. 1-19). Oxford: Pergamon.
- [63] Keller, B. A., & Hirsch, C. R. (1998). Student preferences for representation of functions. *International journal of mathematical education in science and technology*, 29(1), 1-17.
- [64] Kerslake, D. (1986). Graphs. In: H. Kathleen (Hrsg.), *Children's understanding of mathematics: 11-16* (pp. 120-136). London: J. Murray.
- [65] Kleiner, I. (1989). Evolution of the Function Concept: A Brief Survey. *The College Mathematics Journal*, 20(4), 282-300.
- [66] Klieme, E., & Baumert, J. (2001). Identifying national cultures of mathematics education: Analysis of cognitive demands and differential item functioning in TIMSS. *European Journal of Psychology of Education*, 16(3), 385-402.
- [67] Knoche, N., & Lind, D. (2004a). Testtheoretische Modelle und Verfahren bei PISA-2000-Mathematik. In M. Neubrand (Hrsg.), *Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland: Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA-2000* (S. 51-69). Wiesbaden: VS -Verlag für Sozialwissenschaften.

- [68] Knoche, N., & Lind, D. (2004b). Eine Differentielle Itemanalyse zu den Faktoren Bildungsgang und Geschlecht. In M. Neubrand (Hrsg.), *Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland: Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA-2000* (S. 73-86). Wiesbaden: VS -Verlag für Sozialwissenschaften.
- [69] Krüger, K. (2000a). *Erziehung zum funktionalen Denken: zur Begriffsgeschichte eines didaktischen Prinzips*. Berlin: Logos Verlag.
- [70] Krüger, K. (2000b). Kinematisch-funktionales Denken als Ziel des höheren Mathematikunterrichts – das Scheitern der Meraner Reform. *Mathematische Semesterberichte*, 47, 221-241.
- [71] Leinhardt, G. Zaslavsky, O., & Stein M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: tasks, learning, and teaching. *Review of educational research*, 60(1), 1-64.
- [72] Lengnink, K. (2002). Wie Jugendliche über Abhängigkeit reden: Anknüpfungspunkte für eine Einführung in den Funktionsbegriff. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 303-306.
- [73] Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Hrsg.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- [74] Luzin, N. (1930). The evolution of... Function: Part I and Part II; Translated by Abe Shenitzer. *American Mathematical Monthly* 1998, (Part I pp. 59-67, Part II pp. 263-270). (im Original erschienen 1930: *The Great Soviet Encyclopedia*, 59, 314-334.)
- [75] Malik, M. A. (1980). Historical and pedagogical aspects of the definition of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 11(4), 489-492.
- [76] Malle, G. (ohne Jahr). Unveröffentlichte Manuskripte.
- [77] Malle, G. (1996). Aus der Geschichte lernen. *Mathematik Lehren*, 75, 4-8.
- [78] Markovits, Z. Eylon, B. S., & Bruckheimer M. (1986). Functions today and yesterday. *For the learning of mathematics*, 6(2), 18-24 & 28.
- [79] Markovits, Z., Eylon, B. S., & Bruckheimer, M. (1989). Difficulties students have with the function concept. In A. F. Coxford, & A. P. Shulte (Hrsg.), *The Ideas of Algebra, K-12* (S. 43-60). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics: Yearbook 1988.
- [80] Monk, G. S. (1988). Students' understanding of functions in calculus courses. *Humanistic Mathematics Network Newsletter*, 2.
- [81] Monk, S. (1992). Students' understanding of a function given by a physical model. *The Concept of Function, MAA Notes*, 25, 175-194.
- [82] Müller-Philipp, S. (1992). *Der Funktionsbegriff im Mathematikunterricht*. Münster, New York: Waxmann.
- [83] Nguyen B. K. (1982). Zur Entwicklung der funktionalen Denkweise im Mathematikunterricht. *Mathematik in der Schule*, 20; 139-147.

- [84] Neubrand, M., Blum, W., Ehmke, T., Jordan, A., Senkbeil, M., Ulfig, F., & Carstensen, C. H. (2005). Mathematische Kompetenz im Ländervergleich. In M. Prenzel, J. Baumert, W. Blum, R. Lehmann, D. Leutner, M. Neubrand, R. Pekrun, J. Rost, & U. Schiefele (Hrsg.), *PISA 2003. Der zweite Vergleich der Länder in Deutschland – Was wissen und können Jugendliche?* (S. 51-84). Münster: Waxmann.
- [85] Norman, A. (1992). Teachers' mathematical knowledge of the concept of function. *The Concept of Function, MAA Notes*, 25, 215-232.
- [86] OECD (2003a). The PISA 2003 Assessment Framework – Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills. Paris: OECD.
- [87] OECD (2003b). Beispielitems aus dem Mathematiktest. Paris: OECD.
- [88] OECD (2004a). Bildung auf einen Blick; OECD-Indikatoren 2004. Paris: OECD.
- [89] OECD (2004b). Lernen für die Welt von morgen – erste Ergebnisse von PISA 2003. Paris: OECD.
- [90] OECD (2004c). Apprendre aujourd'hui, réussir demain – Premiers résultats de PISA 2003. Paris: OECD.
- [91] OECD (2005a). *PISA 2003 Technical Report*. Paris: OECD.
- [92] OECD (2005b). PISA 2004 Data Analysis Manual, SPSS User. Paris: OECD.
- [93] Pekrun, R., Hofe, R. vom, Blum, W., Götz, T., Wartha, S., & Jullien, S. (2006): Projekt zur Analyse der Leistungsentwicklung in Mathematik (PALMA) – Entwicklungsverläufe, Schülervoraussetzungen und Kontextbedingungen von Mathematikleistungen bei Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I. In M. Prenzel, & L. Allolio-Näcke (Hrsg.), *Untersuchungen von Bildungsqualität von Schule. Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms* (S. 21 – 52). Münster: Waxmann.
- [94] Pihoué, D. (1996). *L'entrée dans le monde de pensée fonctionnel en classe de seconde*. Cahier de DIDIREM – DEA de didactique des disciplines didactiques didactique des mathématiques. Paris: Université Paris 7 – Denis Diderot.
- [95] Prenzel, M., Baumert, J., Blum, W., Lehmann, R., Leutner, D., Neubrand, M., Pekrun, R., Rost, J., & Schiefele, U. (2004a). *PISA 2003: Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs Zusammenfassung*. Paris: OECD.
- [96] Prenzel, M., Baumert, J., Blum, W., Lehmann, R., Leutner, D., Neubrand, M., Pekrun, R., Rost, J., & Schiefele, U. (2004b). *PISA 2003. Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland – Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs*. Münster: Waxmann.
- [97] Prenzel, M., Baumert, J., Blum, W., Lehmann, R., Leutner, D., Neubrand, M., Pekrun, R., Rost, J., & Schiefele, U. (2005). *PISA 2003. Der zweite Vergleich der Länder in Deutschland – Was wissen und können Jugendliche?*. Münster: Waxmann.
- [98] René de Cortret, S. (1988). Une étude sur les représentations graphiques du mouvement comme moyen d'accéder au concept de fonction ou de variable dépendante. *Petit x*, 17, 5-27.

- [99] Ricco, G. (1982). Les premières acquisitions de la notion de fonction linéaire chez l'enfant de 7 à 11 ans. *Educational studies in mathematics*, 13, 289-327.
- [100] Rost, J. (1996). *Testtheorie Testkonstruktion*. Hans Huber: Bern.
- [101] Rüthing, D. (1986). Einige historische Stationen zum Funktionsbegriff. *Der Mathematikunterricht* 32(6), 4-25.
- [102] Ruiz Higuera, L., & Rodríguez Fernandez, J. L. (1996). The transformation of mathematical objects in the didactic system: The case of the notion of function. *Proceedings of the 20th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (4, S. 243-250). Valencia.
- [103] Ryan, J., & Williams, J. (1998). The search for pattern: Student understanding of the table of values representation of function. In C. Kanes, M. Goos, & E. Warren (Hrsg.), *Teaching mathematics in new times: Proceedings of the 18th annual conference of the mathematics education research group of Australasia* (2, S. 492-499). Brisbane: Mathematics education research group of Australasia.
- [104] Scheuneman, J. D., & Bleistein, C. A. (1999). Item Bias. In G. N. Masters, & J. P. Keeves (Hrsg.), *Advances in Measurement in Educational Research and Assessment* (S. 220-234). Oxford: Pergamon.
- [105] Schmidt, G. (1990). Mittelstufe des Gymnasiums: Funktionen und Graphen. *PZ-Information* 5/90. Pädagogisches Zentrum Rheinland-Pfalz.
- [106] Schmidt, W. H., Doris, J., Cogan, L. S., Barrier, E., Gonzalo, I., Moser, U., Shimizu, K., Sawada, T., Valverde, G. A., McKnight, C., Prawat, R. S., Wiley, D. E., Raizen, Senta A., Britton E. D., & Wolfe, R. G. (1996). *Characterizing Pedagogical Flow. An Investigation of Mathematics and Science Teaching in six Countries*. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers.
- [107] Schwarz, B., & Dreyfus, T. (1995). New actions upon old subjects: A new ontological perspective on functions. *Educational studies in mathematics* (29), 259-291.
- [108] Schwingendorf, K., Hawks, J., & Beineke, J. (1992). Horizontal and vertical growth of the students' conception of function. *The Concept of Function, MAA Notes*, 25, 133-150.
- [109] Seeger, F., Steinbring, H., & Sträßer, R. (1989). Die didaktische Transposition – Rezension von Yves Chevallard: La Transposition didactique – du savoir savant au savoir enseigné. *mathematica didactica*, 12(2/3), 157-177.
- [110] Selden, A., & Selden, J. (1992). Research perspectives on conceptions of function summary and overview. *The Concept of Function, MAA Notes*, 25, 1-21.
- [111] Sfard, A. (1987). The conceptions of mathematical notions: Operational and structural. *Proceedings of the 11th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (3), (pp. 162-169). Montreal.
- [112] Sfard, A. (1988). Operational vs. structural method of teaching mathematics – case study. *Proceedings of the 12th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 560-567). Veszprem Hungary.

- [113] Sfard, A. (1989). Transition from operational to structural conception: the notion of function revisited. In G. Vergnaud, J. Rogalski, & M. Artigue (Hrsg.), *Proceedings of PME 13* (3, S. 151-158). Paris.
- [114] Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, 22;1-36.
- [115] Sfard, A. (1992). Operational Origins of Mathematical Objects and the Quandary of Reification – The Case of Function. *The Concept of Function, MAA Notes*, 25, 59-84.
- [116] Sierpinska, A. (1992). Theoretical Perspectives for Development of the Function Concept. *The Concept of Function, MAA Notes*, 25, 25-58.
- [117] Sims-Knight, J. E., & Kaput, J. (1983). Misconceptions of algebraic symbols: Representations and component processes. In H. Helm, & J. Novak (Hrsg.), *Proceedings of the international seminar: Misconceptions in science and mathematics* (S. 495-506). Ithaca, NY: Cornell University.
- [118] Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching*, 77, 20-26.
- [119] Slavit, D. (1995). *A growth-oriented route to the reification of function*. Proceedings of the 17<sup>th</sup> Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.
- [120] Slavit, D. (1997). An Alternate Route to the Reification of Function. *Educational Studies in Mathematics*, 33, 259-281.
- [121] Steiner, H.-G. (1969). Aus der Geschichte des Funktionsbegriffs. *Der Mathematikunterricht*, 15(3), 13-39.
- [122] Stellmacher, H. (1986). Die nichtquantitative Beschreibung von Funktionen durch Graphen beim Einführungsunterricht. I: G. von Harten, H. N. Jahnke, T. Mormann, M. Otte, F. Seeger, H. Steinbring, & H. Stellmacher (Hrsg.), *IDM-Reihe Untersuchungen zum Mathematikunterricht Band 11; Funktionsbegriff und funktionales Denken* (S. 21-35). Köln: Aulis-Verlag Deubner&Co KG.
- [123] Stoye, W. (1990). Befragungen zu Schülern zum Funktionsbegriff – Ergebnisse im Vergleich. *Mathematik in der Schule, Berlin* 28, 11, 766-777.
- [124] Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.
- [125] Tall, D., & Bakar, M. (1991). Students' mental prototypes for functions and graphs. Proceedings of the 15th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (1), (pp. 104-111). Assisi.
- [126] Tall, D., & Bakar M. (1992). Students' mental prototypes for functions and graphs. *International Journal of mathematics education in science and technology*, 23(1), 39-50.

(2007, 17. Juli) <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1992c-bakar-ijmest.pdf>.

- [127] Tall, D. (1996). Chapter 8: Funktionen and Calculus. In A. J. Bishop (Hrsg.), *International Handbook of Mathematics Education* (S. 289-325). Kluwer Academic Publishers.
- [128] Thomas, H. L. (1975). The concept of function. In M. F. Rosskopf (Hrsg.), *Children's mathematical concepts: Six Piagetian studies in mathematics education* (S. 145-172). New York: Teachers College Press.
- [129] Thompson, P. W. (1994). Students, Functions, and the Undergraduate Curriculum. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld, & J. Kaput (Hrsg.), *Research in Collegiate Mathematics Education, I, CBMS Issues in Mathematics Education* (4, S. 21-44).  
(2007, 17. Juli) <http://pat-thompson.net/PDFversions/1994StuFunctions.pdf>.
- [130] Thorpe, J. A. (1989). Past research and current issues – Algebra: What should we teach and how should we teach it?. In S. Wagner, & C. Kieran (Hrsg.), *Research agenda for mathematics education – Research issues in the learning and teaching of Algebra* (4, S. 11-24). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- [131] Vergnaud, G. (1988). Multiplicative Structures. In H. Hiebert, & M. Behr (Hrsg.), *Number concepts and operations in the middle grades* (S. 141-161). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- [132] Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2.3), 133-170.
- [133] Vergnaud, G. (1996). The theory of conceptual fields; In L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin, & B. Greer (Hrsg.), *Theories of mathematical learning* (S. 219-239). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- [134] Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of mathematical education in science and technology*, 14(3), 293-305.
- [135] Vinner, S. (1989). The avoidance of visual considerations in calculus students. *Focus on learning problems in mathematics*, 11(2), 149-156.
- [136] Vinner, S. (1992). The function concept as a prototype for problems in mathematics learning. *The Concept of Function, MAA Notes*, 25, 195-214.
- [137] Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for research in mathematics education*, 20(4), 356-366.
- [138] Vollrath, H.-J. (1978). Schülerversuche zum Funktionsbegriff. *Der Mathematikunterricht*, 24(4), 90-101.
- [139] Vollrath, H.-J. (1986a). Search Strategies as indicators of functional thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 17, 387-400.  
(2007, 17. Juli) <http://www.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/history/vollrath/papers/043.pdf>.



- [140] Vollrath, H.-J. (1986b). Zur Entwicklung des Funktionalen Denkens. In H.-G. Steiner (Hrsg.), Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld; Untersuchungen zum Mathematikunterricht – Grundfragen der Entwicklung mathematischer Fähigkeiten, (13, S. 59-68). Köln: Aulis Verlag Deubner & Co KG.
- [141] Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematikdidaktik*, 10, 3-37.
- [142] Wang, W.-C. (2000). The Simultaneous Factorial Analysis of Differential Item Functioning. *Methods of Psychological Research Online*, Vol. 5, 57-75.
- [143] Wartha, S. (2007). *Längsschnittliche Untersuchungen zur Entwicklung des Bruchzahlbegriffs*. Hildesheim: Franzbecker.
- [144] Weigand, H.-G. (1988). Zur Bedeutung der Darstellungsform für das Entdecken von Funktionseigenschaften. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 9, 287-325.
- [145] Wu, M. L., Adams, J. A., & Wilson, M., R. (1998). *ACER ConQuest: Generalised item response modelling software manual*. Melbourne: ACER.
- [146] Youschkevitch, A. P. (1976). The concept of function up to the middle of the 19th century. *Archive for history of exact sciences*, 16, 36-85. (Traduction française de Bellemin J.-M. (1981). Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIXe siècle; "Fragments d'histoire des mathématiques". *Brochure A.P.M.E.P.*, 41, 7-68.)
- [147] Zehetmeier, S. (2001). *Der Funktionsbegriff im Mathematikunterricht*. Unveröffentlichte Zulassungsarbeit, Universität Regensburg.
- [148] Zumbo, B. D. (1999). *A Handbook on the Theory and Methods of Differential Item Functioning (DIF): Logistic Regression Modeling as a Unitary Framework for Binary and Likert-type (Ordinal) Item Scores*. Ottawa ON: Directorate of Human Resources Research and Evaluation, Department of National Defence.

## Programmes:

- [149] Bildungsstandards Hauptschulabschluss (2004). (2005, Januar 27). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss (Jahrgangsstufe 9); Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004. <http://www.kmk.org/schul/home1.htm>.
- [150] Bildungsstandards Realschulabschluss (2003). (2005, Januar 27). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss (Jahrgangsstufe 10); Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 04.12.2003. <http://www.kmk.org/schul/home1.htm>.
- [151] Lehrplan Bayern Gymnasium G9 (1989). (2004, Oktober 9). Fachlehrplan für Mathematik, gültig ab 01.08.1989. <http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp>.
- [152] Lehrplan Bayern Gymnasium Klasse 5 (2004). (2006, Dezember 12). Mathematik Jgst. 5 (G8), gültig ab 19.07.2004. <http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp>.
- [153] Lehrplan Bayern Gymnasium Klasse 6 (2004). (2006, Dezember 12). Mathematik Jgst. 6 (G8), gültig ab 19.07.2004. <http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp>.
- [154] Lehrplan Bayern Gymnasium Klasse 7 (2004). (2006, Dezember 12). Mathematik Jgst. 7 (G8), gültig ab 19.07.2004. <http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp>.
- [155] Lehrplan Bayern Gymnasium Klasse 8 (2006). (2006, Dezember 12). Mathematik Jgst. 8 (G8), gültig ab 15.03.2006. <http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp>.
- [156] Lehrplan Bayern Gymnasium Klasse 9 (o.J.). (2006, Dezember 12). Mathematik Jgst. 9 (G8). <http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp>.
- [157] Lehrplan Bayern Gymnasium Klasse 10 (o.J.). (2006, Dezember 12). Mathematik Jgst. 10 (G8). <http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp>.
- [158] Lehrplan Bayern Hauptschule Klasse 5 (1997). (2006, Dezember 14). Lehrplan für die bayerische Hauptschule - Jahrgangsstufe 5, gültig ab 29.10.1997. <http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp>.
- [159] Lehrplan Bayern Hauptschule Klasse 5 (2004). (2006, Dezember 12). Lehrplan für die bayerische Hauptschule, Kapitel III-Teil I Jahrgangsstufe 5, gültig ab 07.07.2004. <http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp>.
- [160] Lehrplan Bayern Hauptschule Klasse 6 (1997). (2006, Dezember 17). Lehrplan für die bayerische Hauptschule - Jahrgangsstufe 6, gültig ab 29.10.1997. <http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp>.
- [161] Lehrplan Bayern Hauptschule Klasse 6 (2004). (2006, Dezember 12). Lehrplan für die bayerische Hauptschule, Kapitel III-Teil I Jahrgangsstufe 6, gültig ab 07.07.2004. <http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp>.
- [162] Lehrplan Bayern Hauptschule Klasse 7 (1997). (2006, Dezember 17). Lehrplan für die bayerische Hauptschule - Jahrgangsstufe 8, gültig ab 29.10.1997. <http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp>.

- [163] Lehrplan Bayern Hauptschule Klasse 7 (2004). (2006, Dezember 12). Lehrplan für die bayerische Hauptschule, Kapitel III-Teil I Jahrgangsstufe 7, gültig ab 07.07.2004. <http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp>.
- [164] Lehrplan Bayern Hauptschule Klasse M7 (2004). (2006, Dezember 13). Lehrplan für die bayerische Hauptschule, Kapitel III-Teil II Jahrgangsstufe M7, gültig ab 07.07.2004. <http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp>.
- [165] Lehrplan Bayern Hauptschule Klasse 8 (1997). (2006, Dezember 17). Lehrplan für die bayerische Hauptschule - Jahrgangsstufe 8, gültig ab 29.10.1997. <http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp>
- [166] Lehrplan Bayern Hauptschule Klasse 8 (2004). (2006, Dezember 12). Lehrplan für die bayerische Hauptschule, Kapitel III-Teil I Jahrgangsstufe 8, gültig ab 07.07.2004. <http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp>.
- [167] Lehrplan Bayern Hauptschule Klasse M8 (2004). (2006, Dezember 13). Lehrplan für die bayerische Hauptschule, Kapitel III-Teil II Jahrgangsstufe M8, gültig ab 07.07.2004. <http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp>.
- [168] Lehrplan Bayern Hauptschule Klasse 9 (1997). (2006, Dezember 17). Lehrplan für die bayerische Hauptschule - Jahrgangsstufe 9, gültig ab 29.10.1997. <http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp>.
- [169] Lehrplan Bayern Hauptschule Klasse 9 (2004). (2006, Dezember 12). Lehrplan für die bayerische Hauptschule, Kapitel III-Teil I Jahrgangsstufe 9, gültig ab 07.07.2004. <http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp>.
- [170] Lehrplan Bayern Hauptschule Klasse M9 (2004). (2006, Dezember 13). Lehrplan für die bayerische Hauptschule, Kapitel III-Teil II Jahrgangsstufe M9, gültig ab 07.07.2004. <http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp>.
- [171] Lehrplan Bayern Hauptschule Klasse 10 (1997). (2006, Dezember 17). Lehrplan für die bayerische Hauptschule - Jahrgangsstufe 10, gültig ab 29.10.1997. <http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp>.
- [172] Lehrplan Bayern Hauptschule Klasse M10 (2004). (2006, Dezember 13). Lehrplan für die bayerische Hauptschule, Kapitel III-Teil II Jahrgangsstufe M10, gültig ab 07.07.2004. <http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp>.
- [173] Lehrplan Bayern Realschule R4 (1993). (2006, Dezember 16). Ebene: 4 Fachlehrpläne aller Pflichtfächer und aller Wahlpflichtfächer nach Fächern in einer Datei, gültig ab 08.07.1993. <http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp>.
- [174] Lehrplan Bayern Realschule Klasse 5 (2000). (2004, Oktober 9). Mathematik Jgst. 5, gültig ab 01.08.2000. <http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp>.
- [175] Lehrplan Bayern Realschule Klasse 6 (2000). (2004, Oktober 9). Mathematik Jgst. 6, gültig ab 01.08.2000. <http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp>.
- [176] Lehrplan Bayern Realschule Klasse 7 (2003). (2004, Oktober 9). Mathematik Jgst. 7, gültig ab 01.08.2003. <http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp>.

- [177] Lehrplan Bayern Realschule Klasse 8 (2000). (2004, Oktober 9). Mathematik Jgst. 8, gültig ab 01.08.2000. <http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp>.
- [178] Lehrplan Bayern Realschule Klasse 9 (2003). (2004, Oktober 9). Mathematik Jgst. 9, gültig ab 01.08.2003. <http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp>.
- [179] Lehrplan Bayern Realschule Klasse 10 (2003). (2004, Oktober 9). Mathematik Jgst. 10, gültig ab 01.08.2003. <http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp>.
- [180] Programme France (1902). (2006, April 5). Arrêtés du 31 mai 1902, 27 et 28 juillet 1905, 26 juillet 1909 et 15 novembre 1912.  
<http://membres.lycos.fr/sauvezlesmaths/Textes/IVoltaire/prg1902.htm>.
- [181] Programme France (1923). (2006, April 5). Instructions officielles, Arrêtés du 23 février 1923 et du 3 juin 1925. <http://membres.lycos.fr/sauvezlesmaths/Textes/IVoltaire/prg1902.htm>.
- [182] Programme France (1945). (2006, April 5). Instructions officielles de 1945.  
<http://membres.lycos.fr/sauvezlesmaths/Textes/IVoltaire/prg1945.htm>.
- [183] Programme France (1960). Arrêtés du 31 juillet 1958, 20 juillet 1960, 23 juin 1962 et du 26 octobre 1964; circulaire du 20 août 1965.
- [184] Programme France (1969). Arrêtés du 26 juillet 1968, 29 juillet 1968 et 22 juillet 1971; Institut national de recherche et de documentation pédagogiques; 2e édition, Brochure n°59 Pg; Instructions particulières du 28 février 1969, 6 février 1970 et 22 novembre 1971.
- [185] Programme France (1977). Arrêtés du 17 mars 1977, 16 novembre 1978; Instructions du 29 avril 1977, 16 novembre 1978.
- [186] Programme France (1985). Arrêtés du 14 novembre 1985 et 25 avril 1990.
- [187] Programme France 2<sup>de</sup> (2001). (2005, Januar 25). Arrêté du 10 juillet 2001; Fixant le programme de la classe de seconde. BO hors série n° 2 du 30 août 2001 - Volume 7.  
<http://www.cndp.fr/accueil.htm>.
- [188] Programme France 2<sup>de</sup> Document d'accompagnement (2000). (2006, Dezember 16). Concernant le programme de seconde paru au BO hors-série n°6 du 12 août et applicable à la rentrée 2000. <http://www.cndp.fr/accueil.htm>.
- [189] Programme France 3<sup>e</sup> (1998). (2006, Dezember 16). Arrêté du 15 septembre 1998; Programmes des classes de troisième des collèges; B.O. hors série n° 10 du 15 octobre 1998; applicable à la rentrée 1999. <http://www.cndp.fr/accueil.htm>.
- [190] Programme France 5<sup>e</sup> et 4<sup>e</sup> (1997). (2006, Dezember 16). Arrêté du 10 janvier 1997; Programme du cycle central; B.O. hors série n° 1 du 13 février 1997; J.O. du 21 janvier 1997; Arrêté du 15 septembre 1998; applicable à la rentrée 1997 en classe de cinquième; applicable à la rentrée 1998. <http://www.cndp.fr/accueil.htm>.
- [191] Programme France 5<sup>e</sup> et 4<sup>e</sup> (2005). (2006, Januar 22). Arrêté du 25 juillet 2005; Programme de l'enseignement des mathématiques en classes de cinquième et de quatrième; B.O. hors série n° 5 du 25 août 2005 volume 2; J.O. du 5 août 2005; applicable à la rentrée 2006 en

classe de cinquième; applicable à la rentrée 2007 en classe de quatrième.  
<http://www.cndp.fr/accueil.htm>.

- [192] Programme France 6<sup>e</sup> (1995). (2006, Dezember 16). Arrêté du 22 novembre 1995; Programme du cycle d'adaptation; applicable à la rentrée 1996.  
<http://www.cndp.fr/accueil.htm>.
- [193] Programme France 6<sup>e</sup> (2004). (2006, Dezember 17). Arrêté du 6 juillet 2004; Programme de l'enseignement des mathématiques en classe de sixième du collège; B.O. hors série n° 5 du 9 septembre 2004 volume 1; J.O. du 17 juillet 2004; applicable à la rentrée 2005.  
<http://www.cndp.fr/accueil.htm>.
- [194] Programme France CM2 (2002). (2006, Februar 18). Programmes d'enseignement de l'école primaire; B.O. hors série n° 1 du 14 février 2002; applicable à la rentrée 2004 en CM2.  
<http://www.cndp.fr/accueil.htm>.
- [195] Programme France CM2 Document d'application (2002). (2007, Januar 30). Les nouveaux programmes de l'école primaire; Mathématiques; Document d'application; applicable à la rentrée 2004. <http://www.cndp.fr/accueil.htm>.
- [196] Programme France CM2 Accompagnement Articulation (2002). (2005, Februar 19). Les nouveaux programmes de l'école primaire; Mathématiques; Document d'accompagnement; Articulation école collège; applicable à la rentrée 2004.  
<http://www.cndp.fr/accueil.htm>.
- [197] Programme France Collège Projet (o.J.). (2004, Oktober 7). La rénovation des programmes du collège; Consultation sur les projets proposés par le groupe d'experts; Mathématiques.  
<http://eduscol.education.fr/D0048/LLPPRC01.htm>.
- [198] Programme France école primaire (1995). Arrêté du 22 février 1995; Programmes d'enseignement de l'école primaire; applicable à la rentrée 1997 en CM2.

## Livres de classe

- [199] Antibì, A., Barra, R. & Morin, J. (Hrsg.) (2004). *Transmath 2<sup>de</sup>, Programme 2000*. Paris: Nathan.
- [200] Brissiaud, R. (Hrsg.). (2000a). *J'apprends les maths, manuel CM2* (Aufl. 2004). Paris: Retz.
- [201] Brissiaud, R. (Hrsg.). (2000b). *J'apprends les maths, fichier d'activités CM2* (Aufl. 2004). Paris: Retz.
- [202] Chapiron, G., Mante, M., Mulet-Marquis, R. & Pérotin, C. (2001). *Collection Triangle, Mathématiques 5<sup>e</sup>, Programme 1997* (2. Aufl.). Paris: Hatier.
- [203] Chapiron, G., Mante, M., Mulet-Marquis, R. & Pérotin, C. (2002). *Collection Triangle, Mathématiques 4<sup>e</sup>*, (2. Aufl.). Paris: Hatier.
- [204] Chapiron, G., Mante, M., Mulet-Marquis, R. & Pérotin, C. (2003). *Collection Triangle, Mathématiques 3<sup>e</sup>* (2. Aufl.). Paris: Hatier.
- [205] Chapiron, G., Mante, M., Mulet-Marquis, R. & Pérotin, C. (2005). *Collection Triangle, Mathématiques 6<sup>e</sup>, Programme 2005*. Paris: Hatier.
- [206] Charnay, C., Combier, G. & Dussuc, M.-P. (Hrsg.). (2004a). *Cap maths CM2*. Paris: Hatier.
- [207] Charnay, C., Combier, G. & Dussuc, M.-P. (Hrsg.). (2004b). *Le Dico.maths, répertoire des mathématiques CM2*. Paris: Hatier.
- [208] Delord, R. & Vinrich, G. (Hrsg.) (2000a). *Collection Cinq sur Cinq, Maths 6<sup>e</sup>* (2. Aufl.). Paris: Hachette Éducation.
- [209] Delord, R. & Vinrich, G. (Hrsg.) (2000b). *Collection Cinq sur Cinq, Maths 5<sup>e</sup>* (2. Aufl.). Paris: Hachette Éducation.
- [210] Delord, R. & Vinrich, G. (Hrsg.) (2002). *Collection Cinq sur Cinq, Maths 4<sup>e</sup>* (2. Aufl.). Paris: Hachette Éducation.
- [211] Delord, R. & Vinrich, G. (Hrsg.) (2003). *Collection Cinq sur Cinq, Maths 3<sup>e</sup>* (2. Aufl.). Paris: Hachette Éducation.
- [212] Feuerlein, R., Titze, H. & Walter, H. (1992a). *Mathematik 7, Algebra* (2. Aufl. 1999). München: Bayerischer Schulbuch-Verlag.
- [213] Feuerlein, R., Titze, H. & Walter, H. (1992b). *Mathematik 8, Algebra* (2. Aufl. 2000). München: Bayerischer Schulbuch-Verlag.
- [214] Feuerlein, R., Titze, H. & Walter, H. (1992c). *Mathematik 9, Algebra* (2. Aufl. 2001). München: Bayerischer Schulbuch-Verlag.
- [215] Feuerlein, R., Titze, H. & Walter, H. (1992d). *Mathematik 10, Algebra* (3. Aufl. 2002). München: Bayerischer Schulbuch-Verlag.
- [216] Habler, E., Kappl, S., Kiermair, X., Lippert, H., Püls, H. & Sobotta, C. (1995a). *Mathematik für Realschulen. 8. Jahrgangsstufe Wahlpflichtfächergruppe I*. Frankfurt am Main: Moritz Diesterweg & Co.

- [217] Habler, E., Kappl, S., Kiermair, X., Lippert, H., Püls, H. & Sobotta, C. (1995b). *Mathematik für Realschulen. 8. Jahrgangsstufe Wahlpflichtfächergruppe II/III*. Frankfurt am Main: Moritz Diesterweg & Co.
- [218] Habler, E., Kappl, S., Kiermair, X., Lippert, H., Püls, H., Sobotta, C. & Steger, M. (1996a). *Mathematik für Realschulen. 9. Jahrgangsstufe Wahlpflichtfächergruppe I*. Frankfurt am Main: Moritz Diesterweg & Co.
- [219] Habler, E., Kappl, S., Kiermair, X., Lippert, H., Püls, H., Sobotta, C. & Steger, M. (1996b). *Mathematik für Realschulen. 9. Jahrgangsstufe Wahlpflichtfächergruppe II/III*. Frankfurt am Main: Moritz Diesterweg & Co.
- [220] Habler, E., Kappl, S., Kiermair, X., Lippert, H., Püls, H., Sobotta, C. & Steger, M. (1997a). *Mathematik für Realschulen 10. Jahrgangsstufe Wahlpflichtfächergruppe I*. Frankfurt am Main: Moritz Diesterweg & Co.
- [221] Habler, E., Kappl, S., Kiermair, X., Lippert, H., Püls, H., Sobotta, C. & Steger, M. (1997b). *Mathematik für Realschulen. 10. Jahrgangsstufe Wahlpflichtfächergruppe II/III*. Frankfurt am Main: Moritz Diesterweg & Co.
- [222] Habler, E., Kappl, S., Kiermair, X., Lippert, H., Püls, H., Sobotta, C., Steger, M. & Sulzenbacher, M. (2001a). *Mathematik für Realschulen. 5. Jahrgangsstufe*. Frankfurt am Main: Moritz Diesterweg & Co.
- [223] Habler, E., Kappl, S., Kiermair, X., Lippert, H., Püls, H., Sobotta, C., Steger, M. & Sulzenbacher, M. (2001b). *Mathematik für Realschulen. 6. Jahrgangsstufe*. Frankfurt am Main: Moritz Diesterweg & Co.
- [224] Habler, E., Kappl, S., Kiermair, X., Lippert, H., Püls, H., Sobotta, C., Steger, M. & Sulzenbacher, M. (2002). *Mathematik für Realschulen. 7. Jahrgangsstufe Wahlpflichtfächergruppe II/III*. Frankfurt am Main: Moritz Diesterweg & Co.
- [225] Habler, E., Kappl, S., Lippert, H., Sobotta, C. (1994). *Mathematik für Realschulen. 7. Jahrgangsstufe*. Frankfurt am Main: Moritz Diesterweg & Co.
- [226] Kratz, J. (1993a). *Mathematik 7, Geometrie* (1. Aufl. 1993). München: Bayerischer Schulbuch-Verlag.
- [227] Kratz, J. (1993b). *Mathematik 8, Geometrie* (1. Aufl. 1993). München: Bayerischer Schulbuch-Verlag.
- [228] Kratz, J. (1993c). *Mathematik 9, Geometrie* (1. Aufl. 1993). München: Bayerischer Schulbuch-Verlag.
- [229] Kratz, J., Schweiger, K. & Wörle, K. (1994). *Mathematik 10, Geometrie* (1. Aufl. 1994). München: Bayerischer Schulbuch-Verlag.
- [230] Kunesch, E. & Rieck, B. (1995). *Mathematik 6, Algebra/Geometrie* (2. Aufl. 1999). München: Bayerischer Schulbuch-Verlag.
- [231] Misset, L., Turner, J. & Lotz, É. (2004). *Décllic 2<sup>de</sup> Mathématiques*. Paris: Hachette Éducation.

- [232] Rieck, B. (1994). *Mathematik 5, Algebra/Geometrie* (3. Aufl. 1999). München: Bayerischer Schulbuch-Verlag.
- [233] Rinkens, H.-D. & Wynands, A. (Hrsg.). (1997). *Mathe aktiv 7 für bayerische Hauptschulen*. Hannover: Schroedel.
- [234] Rinkens, H.-D. & Wynands, A. (Hrsg.). (1998). *Mathe aktiv 6 für bayerische Hauptschulen*. Hannover: Schroedel.
- [235] Rinkens, H.-D. & Wynands, A. (Hrsg.). (2001a). *Mathe aktiv 5 für bayerische Hauptschulen*. Hannover: Schroedel.
- [236] Rinkens, H.-D. & Wynands, A. (Hrsg.). (2001b). *Mathe aktiv 8 für bayerische Hauptschulen*. Hannover: Schroedel.
- [237] Rinkens, H.-D. & Wynands, A. (Hrsg.). (2001c). *Mathe aktiv 9 für bayerische Hauptschulen*. Hannover: Schroedel.
- [238] Schmitt, H., Wohlfahrt, P., u.a. (1989). *Mathematik Buch 8, Ausgabe GN, Algebra/Geometrie* (3. Aufl. 1989). München: Bayerischer Schulbuch-Verlag.
- [239] Vogel, G.-H., Vollath, E. & Haubner, K. (Hrsg.). (2002). *Formel 10, Mathematik für die Hauptschule*. Bamberg: C.C. Buchner.







**TITRE :**

La pensée fonctionnelle des élèves de 10 à 16 ans – analyses comparatives et études empiriques de son enseignement en France et en Allemagne.

**AUTEUR :**

Pascal Stölting

**RESUME :**

Les dépendances fonctionnelles sont omniprésentes dans la vie quotidienne, mais les résultats de plusieurs études montrent que les élèves ont des difficultés à traiter des problèmes de ce domaine. Ce travail compare l'approche des dépendances fonctionnelles en France et en Allemagne, à l'exemple de la Bavière.

Dans la première partie la pensée fonctionnelle est définie clairement et est reliée aux cadres théoriques pertinents utilisés en France et en Allemagne, comme les Grundvorstellungun (Vom Hofe), les registres sémiotiques (Duval) ou le concept image (Vinner). Les outils nécessaires pour les analyses de ce travail y sont également développés.

Les chapitres suivants sont dédiés à la comparaison des programmes et des livres de classe. Le but est d'éclaircir dans quelle mesure les élèves des deux pays sont aidés dans le développement de la pensée fonctionnelle.

Puis il est essayé d'identifier en pratique les points forts et les points faibles reconnus lors des analyses des curriculums. Deux approches différentes ont été choisies pour étudier comment les élèves travaillent avec la pensée fonctionnelle et quels problèmes surgissent lors de ce travail :

des analyses quantitatives des données de PISA et PALMA sont faites et amènent à démontrer certaines relations avec les résultats des analyses précédentes.

Les analyses qualitatives d'une étude d'interviews réalisée en France et en Allemagne documentent certains points forts et points faibles identifiés auparavant.

Finalement des propositions sont faites sur la base des résultats de ce travail pour essayer d'éviter les points faibles des deux pays et pour chercher à profiter des points forts.

**MOTS- CLES :**

Pensée fonctionnelle, fonctions, représentation, étude comparative France – Allemagne, PISA, évaluation Palma.

**Éditeur: IREM de Paris 7**

Responsable de la publication: C. Hache

IREM de Paris 7 – Case 7018

Université Paris Diderot

75205 Paris cedex 13

iremp7@math.jussieu.fr

<http://iremp7.math.jussieu.fr>

Dépôt légal : Juillet 2008

ISBN : 978-2-86612-300-0